

# CAPITULO

# 3

**MODELIZACION Y DIMENSIONAMIENTO DE LOSAS**

**MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS**

---

### 3.1 MODELIZACION DE LOSAS MEDIANTE EF

#### 3.1.1 Malla de elementos finitos

Un primer aspecto a considerar al modelar losas mediante elementos finitos es su número y distribución dado que estos afectan al error numérico. Independientemente del número de elementos necesarios para representar una determinada geometría de losa este número debe garantizar un error reducido en desplazamientos y, más importante, en momentos y cortantes (variables de mayor utilidad práctica). Este número es función del número y disposición de apoyos dado que, como hemos visto, la precisión del método de los EF depende de la variación de las funciones en su dominio.

Considere la losa simplemente apoyada en sus cuatro bordes del Capítulo 2 y su solución representada en la tablas 1 y 3 para cargas distribuidas y puntuales. En todos los casos mallas de 4x4 proporcionan errores numéricos para el momento flector máximo inferiores al 10%. Para las losas empotradas y empleando mallas de 4x4 este error se incrementa al 13% para el elemento mixto y 20% para el de energía potencial. Similares conclusiones pueden obtenerse para las losas apoyadas sólo en sus cuatro esquinas, tal como se concluye de las últimas páginas del Capítulo anterior.

De estos estudios numéricos comparativos se puede establecer un mínimo número de elementos finitos en mallas de 4x4 tanto para losas apoyadas en sus bordes como entre apoyos. Este número podría incrementarse en función de si las cargas son puntuales en lugar de distribuidas y en función del tipo específico de elemento finito a emplear. Mallas de menor calidad pueden ocasionar errores locales y globales significativos. Por otra parte obsérvese que esta discretización es independiente de la dimensión numérica de la losa y que para representar cortantes la malla debería ser más fina.

Como ejemplo ilustrativo de la magnitud posible de los errores globales considérese una losa cuadrada de lado  $L$  apoyada en sus cuatro esquinas y sujeta a una carga distribuida uniforme  $q$ , tal como la mostrada en la figura 3.1. Considerando únicamente la mitad de la losa y tomando momentos respecto a dicho eje de simetría se obtiene, *únicamente por consideraciones de equilibrio* la siguiente ecuación

$$\int_0^L M_{xx} dy + qL \frac{L}{2} \frac{L}{4} - 2R \frac{L}{2} = 0 \quad (3.1)$$

donde  $R$  es la reacción en cada esquina. Por simetría esta equivale a un cuarto de la carga total simplificándose esta expresión a:

$$\int_0^L M_{xx} dy = q \frac{L^3}{8} \quad (3.2)$$

la cual es función únicamente del equilibrio de la losa e indica que, independientemente de la variación de momentos flectores a lo largo del eje de simetría (o del nivel de fisuración de la losa), su integral debe ser exactamente el valor indicado, función exclusiva de la carga y dimensión  $L$  de la losa.

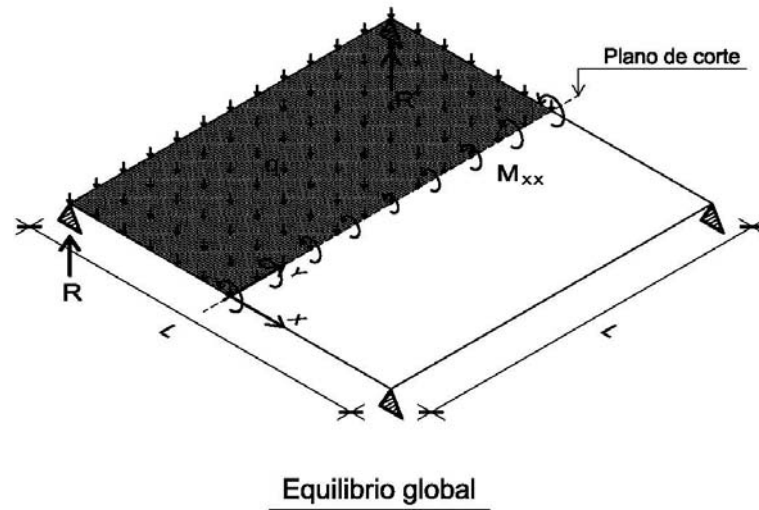


Figura 3.1. Losa cuadrada simplemente apoyada en sus esquinas con plano de corte en eje de simetría.

La figura 3.2 compara resultados para una losa de 10x10m con una carga uniforme de 1T/m<sup>2</sup> empleando el modelo mixto descrito en el Capítulo anterior y el EF empleado por el programa comercial Risa3D, para mallas de 2x2, 4x4 y 8x8. Se puede observar que el error en mallas de 2x2 es muy elevado y superior al 50% para el programa Risa3d por lo que se confirma el valor mínimo de cuatro elementos finitos entre apoyos.

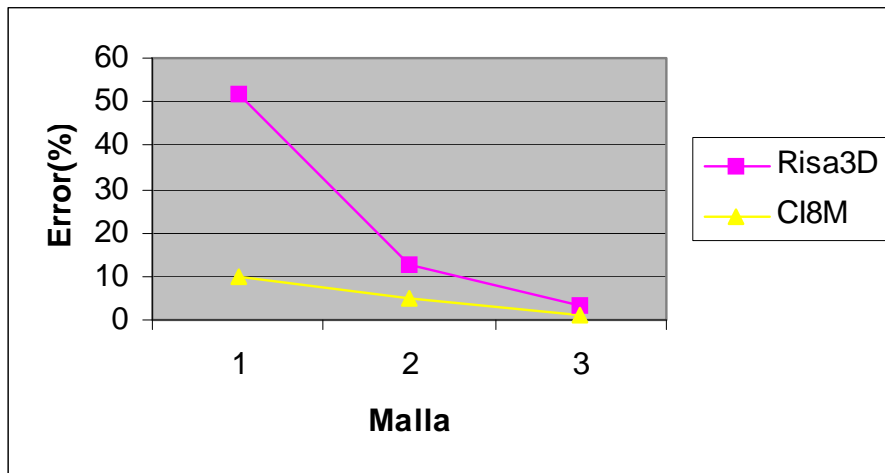


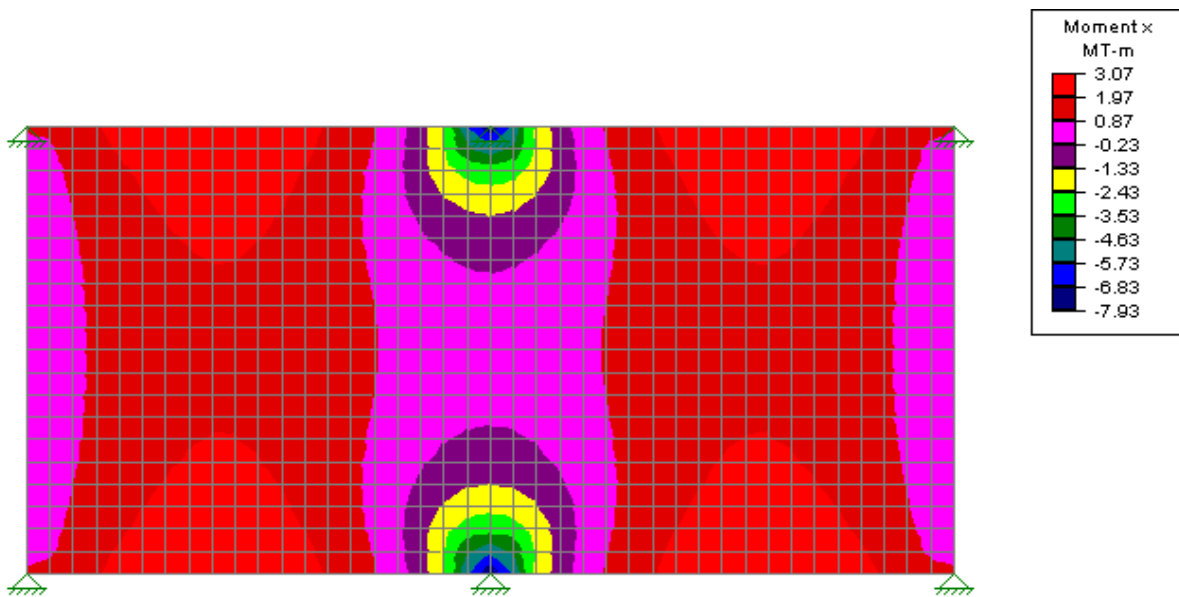
Figura 3.2. Error global en equilibrio para distintas mallas y dos tipos de EF.

Con independencia de la anterior conclusión (que se basa en el equilibrio de momentos según el eje  $x$ ) es útil observar que el momento torsor  $M_{xy}$  en el plano de corte es nulo. Esta observación es válida para cualquier plano de simetría y se basa en consideraciones de equilibrio. Este resultado se puede deducir de considerar un elemento diferencial justamente en el plano de simetría. Por simetría los momentos torsores a ambos lados del plano de corte debe ser iguales y opuestos por lo que el único valor que cumple es nulo. Esta observación es similar para una viga simétrica sometida a un torsor uniforme en su longitud en cuyo caso el torsor central será cero.

### 3.1.2 Representación de apoyos puntuales

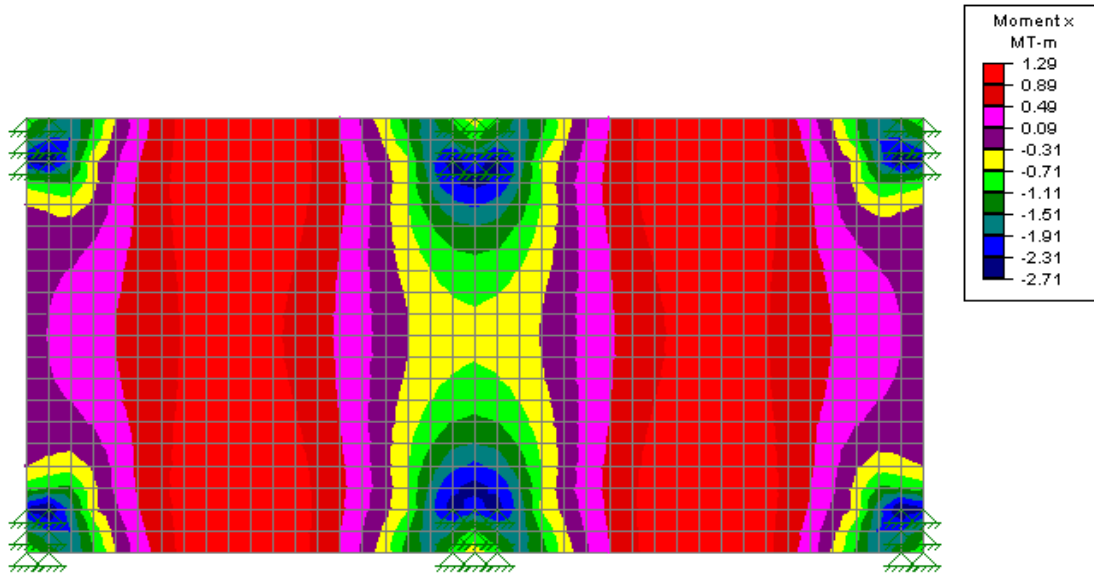
Otro aspecto a considerar al modelar losas mediante EF es el de los apoyos y las cargas puntuales. Los primeros se suelen modelar como apoyos puntuales originando una distorsión importante en la variación de momentos flectores con picos de negativos muy significativos. Es claro que estos picos de negativos reflejan parcialmente el comportamiento de las losas pero su magnitud puede disminuirse si se considera la dimensión real del pilar. Por ejemplo considérese una losa de 10m por 5m apoyada en pilares de 50x50cm en sus cuatro esquinas y punto medio de lado de 10m. La carga por asumida es de 1T/m<sup>2</sup>. Considerando inicialmente apoyos puntuales y una malla de 20x20 EF por vano (de manera de tener elementos de 25cm) se obtiene la variación de momentos de la fig. 3.3. En ella se observa un pico de negativos en el pilar de 7.93Tm/m y un positivo máximo de 3.07Tm/m. Dado que este negativo

corresponde a un valor en un punto y que el armado de losas se realiza para franjas en habitual en la práctica el reducir este según criterio del proyectista.



**Figura 3.3.** Variación de momentos flectores xx, apoyos puntuales.

En primer término y para considerar sólo la influencia de la modelización en la variación de los momentos flectores considérese la misma losa pero representando los pilares como apoyos indesplazables en todo el ámbito del pilar, es decir en un área de 50x50cm para los pilares intermedios. El resultado para este análisis se muestra en la figura 3.4 indicando un momento negativo máximo de sólo 2.71Tm/m. Este resultado es independiente del hecho de que los momentos flectores tengan una variación en el ancho y que para dimensionar estos elementos se deban emplear valores medios en franjas de armado, según se presentará en la sección 3.2. Las desventaja de considerar los apoyos en todo su ámbito son el aumento en el número de incógnitas del modelo y la dificultad de modelar pilares cuanto se tienen diversas plantas, por ello no se suele realizar en la práctica.

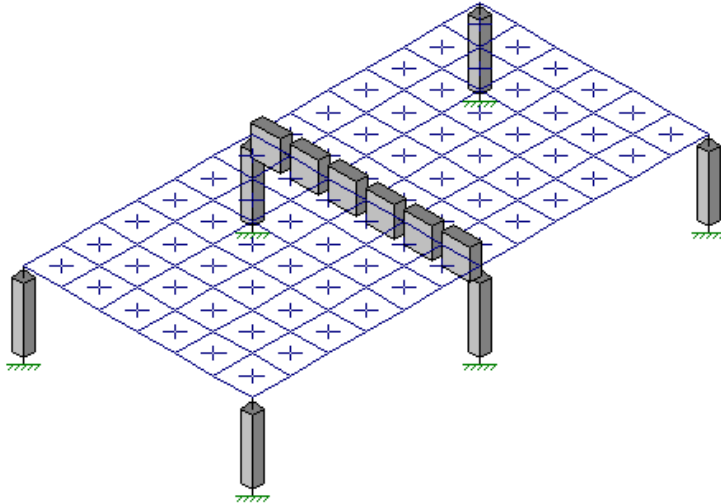


**Figura 3.4.** Variación de momentos flectores xx, apoyos discretos.

### 3.1.3 Representación de vigas y losas

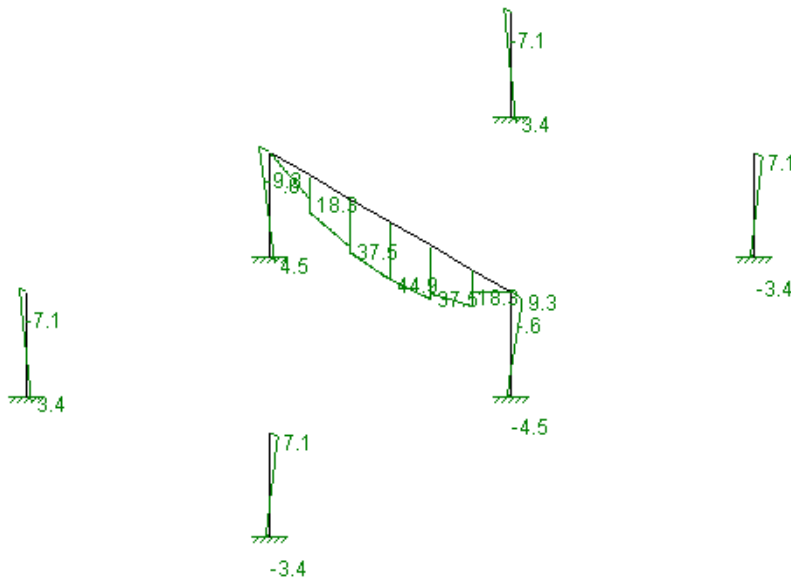
Otro aspecto importante en la modelización de losas es cuando se añaden vigas a la estructura por la diferencia en posición entre sus centros de gravedad. En un modelo de EF con losas y vigas los grados de libertad son comunes lo que ocasiona que la inercia de la viga considerada sea muy inferior a la real. En EEC con dos losas este no es un problema pues ambos centros de gravedad coinciden, pero si se tiene sólo una losa o si la losa es maciza es necesario considerar la diferencia en posición. Este factor es importante dado que al infravalorar la rigidez de la viga resulta en momentos flectores inferiores.

Para representar esta situación correctamente se pueden emplear dos alternativas. Una es simplemente considerar la inercia de la viga con respecto al c.g de la losa y emplear una viga equivalente. Otra consiste en modelar la viga en su centro de gravedad real y emplear barras rígidas denominadas “links” que las unan al de la losa. Ambas alternativas se comparan a continuación para una losa de 16 x 8 m con pilares intermedios y en las esquinas, tal como se muestra en la fig. 3.5 y con una viga de cuelgue. El modelo mostrado en la figura corresponde a no realizar ninguna distinción entre los centros de gravedad. La losa considerada es de 30cm, la viga es de 40x100cm y los pilares de 40x40cm. La carga total es de 1T/m<sup>2</sup>.



**Figura 3.5.** Losa con vigas de cuelgue sin considerar interacción.

Los momentos flectores en las vigas para este modelo se muestra en la fig. 3.6, observándose valores de 44,9Tm. La flecha máxima instantánea en el centro de la viga es de 3,9mm. Aumentando el número de elementos finitos por lado de 6 a 12 se aumenta el momento máximo positivo en la viga hasta 46,7Tm con un flecha de 4,1mm, siendo la diferencia debida a errores numéricos.



**Figura 3.6.** Momentos flectores para el modelo de la fig. 3.18.

Una primera alternativa para mejorar estos resultados consiste en simplemente considerar una viga con inercia equivalente con respecto al c.g de la losa, es decir, a 15cm de la cara superior. Con respecto a este punto la viga, sin considerar la losa superpuesta a ella tiene una inercia de

$$I_{eq} = \frac{b(h-30)^3}{12} + b(h-30)\left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad (3.3)$$

la cual equivale en este ejemplo a un canto equivalente de 135cm. Repitiendo el análisis con este nuevo canto para el modelo de 6 EF por lado se obtiene una flecha de sólo 2,3mm y un momento de hasta 61,7Tm. Este último valor es un 37% superior al obtenido sin considerar la interacción viga-losa.

Otro procedimiento más elaborado para considerar este factor es mediante el empleo de “links” o barras rígidas. Para ello se desplaza la viga hasta su centro de gravedad a 50cm por debajo del c.g de la losa, uniéndose ambos mediante barras de rigidez  $1E+10$  para transferir el cortante entre ambas. Esta rigidez es suficiente dado que valores superiores no mejoran sensiblemente el resultado y pueden ocasionar errores con la precisión de la máquina. Mediante este procedimiento se obtuvo una flecha máxima en el centro de la viga de 2,7mm. El momento flector se obtiene del valor calculado para la barra más su axil multiplicado por la longitud de la barra rígida considerada. Este último valor es significativo y representa el cortante transferido por el “link”. Con estas operaciones el momento máximo en la viga obtenido es de 55,3Tm, es decir un 23% superior al inicial sin considerar la diferencia en posición de los c.gs. Por otra parte, estos valores son ligeramente distintos a los obtenidos mediante la barra de rigidez equivalente pero deben de considerarse como más exactos.

### 3.1.4 Representación de losas reticulares

### 3.1.5 Representación de la fisuración en losas

En losas que no son postensadas o pretensadas es común que la sollicitación origine fisuración, tanto a positivos como a negativos. La fisuración origina una disminución brusca en la rigidez de la losa y, por tanto, un aumento significativo en la flecha. De hecho el análisis lineal elástico de los EF en losas de poco canto es lo que origina un alto porcentaje de las patologías reportadas en la edificación (por ejemplo fisuración de elementos no estructurales). Esta sección plantea un procedimiento simple iterativo para determinar las flechas fisuradas en losas.

Para ello primero se debe obtener la inercia fisurada en secciones de hormigón armado sin sollicitaciones axiales, lo cual puede realizarse de forma simple empleando el procedimiento de la sección

homogeneizada. Para ello denominando “a” a la altura comprimida y considerando una sección totalmente fisurada, se tiene por equilibrio de fuerzas axiales

$$b a \frac{a}{2} - n A_s (d - a) = 0 \tag{3.4}$$

donde  $A_s$  es la armadura en tracción. Este procedimiento se puede extrapolar de forma similar considerando la armadura de compresión como un término adicional  $(n - 1)A_s''$ . Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene el canto del bloque de compresión

$$a = \frac{-nA_s + \sqrt{n^2 A_s^2 + 2bnA_s d}}{b} \tag{3.5}$$

o en función de la cuantía de acero ( $\rho = A_s / bd$ )

$$\frac{a}{d} = n\rho \left( \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} - 1 \right) \tag{3.6}$$

La correspondiente inercia fisurada es, por tanto,

$$I_{fis} = \frac{1}{3} b a^3 + n A_s (d - a)^2 \tag{3.7}$$

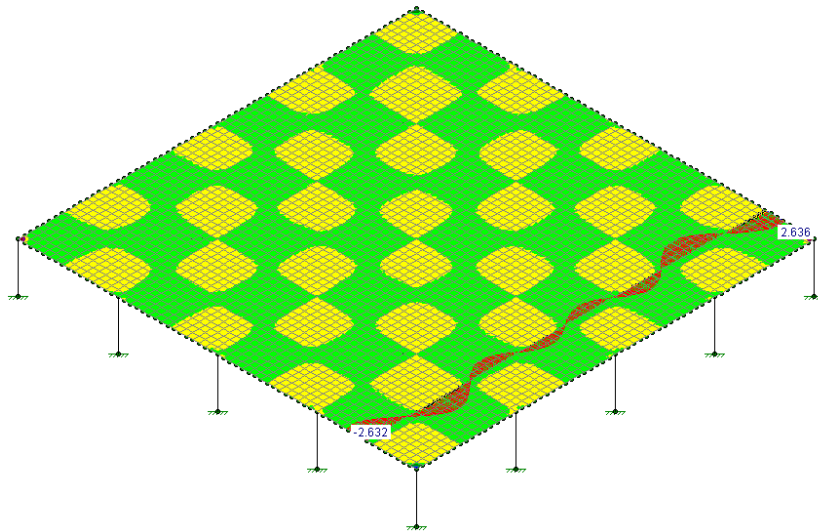
Con lo cual se pueden obtener tablas que proporcionen la inercia fisurada en función de la inercia bruta para una cuantía de acero y una determinada relación h/d. Esta última relación es importante de precisar pues influye de forma notoria en el valor final de la inercia. Por ejemplo para  $h = 1.05d$  y  $1.1d$ , con un hormigón correspondiente a un módulo de equivalencia  $n = 7.7$ , se obtiene la siguiente tabla para el cociente entre la inercia fisurada y la bruta en función de la cuantía:

$\frac{h}{d}$	$\rho(\%) = 100A_s / bd$														
	.3	.5	.7	.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5	2.7	2.9	3.1
1.05	.18	.28	.37	.44	.52	.59	.65	.71	.77	.82	.87	.92	.96	1	1.05
1.1	.16	.24	.32	.39	.45	.51	.57	.62	.67	.71	.76	.8	.84	.88	.91

donde se aprecia que para cuantías bajas del orden de 0.003 la inercia fisurada es del orden de 5 veces inferior a la inercia bruta. Debido a los momentos suelen ser bajos en una gran parte de la losa, es común que el acero de refuerzo corresponda a cuantía mínima de dichas zonas. Por ello en condiciones de servicio no se fisuraría. Sin embargo, debido a variaciones térmicas, pequeños asentamientos de apoyos o alguna sobrecarga no uniformemente distribuidas, se presentan fisuras posteriores las cuales aumentan las deflexiones en el tiempo.

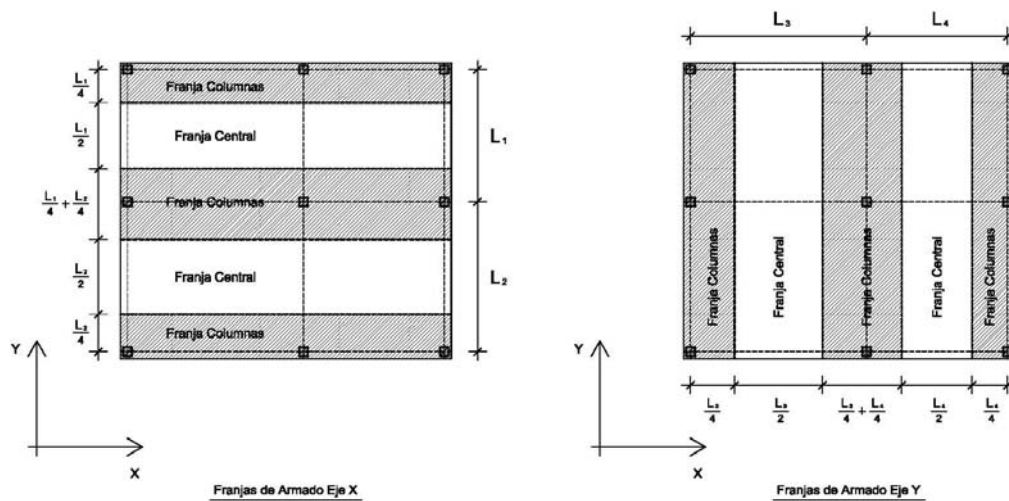
### **3.2 DIMENSIONAMIENTO MEDIANTE FRANJAS DE ARMADO**

El procedimiento clásico de análisis de losas apoyadas en pilares corresponde al de los pórticos virtuales o equivalentes. Este procedimiento vigente en diversas normativas hasta los años 2000 ha servido para dimensionar satisfactoriamente (y como se verá a continuación incluso de forma más económica que el empleo directo de EF) muchas losas. El método se restringía a losas apoyadas en una retícula de pilares uniforme, o con una desviación máxima de 1/10 entre algunos soportes. En realidad es un método de equilibrio que hace hipótesis de simplificación en las ecuaciones de compatibilidad, tal como se mostrará a continuación. Para ello se considera una losa perfectamente uniforme apoyada en una retícula de 5 ejes de pilares cada 6mx6m según la figura 3.x. Asumiendo que el giro normal en cada eje del centro de cada vano es nulo se puede concluir mediante la expresión 2.38 que el momento torsor  $M_{xy}$  es también nulo en dichos ejes. Esta hipótesis de compatibilidad es una aproximación dado que el giro no es nulo en el centro de cada vano (en particular en el vano extremo), de igual forma que no lo es para una viga continua apoyada en pilares. Sin embargo es una hipótesis que permite eliminar los momentos torsores en franjas a lo largo de cada eje y plantear pórticos virtuales o equivalentes en cada eje y dirección. La figura 3.x muestra la variación del momento  $M_{xy}$  para el eje central de la losa considerada observándose valores reducidos, por lo que el giro es efectivamente pequeño y la hipótesis perfectamente válida desde el punto de vista práctico. Otro aspecto es ya si las cargas no son uniformes o si tenemos alternancia, cargas puntuales o losas de sección variable como es habitual en la práctica constructiva, donde el método es lejos de ser válido.



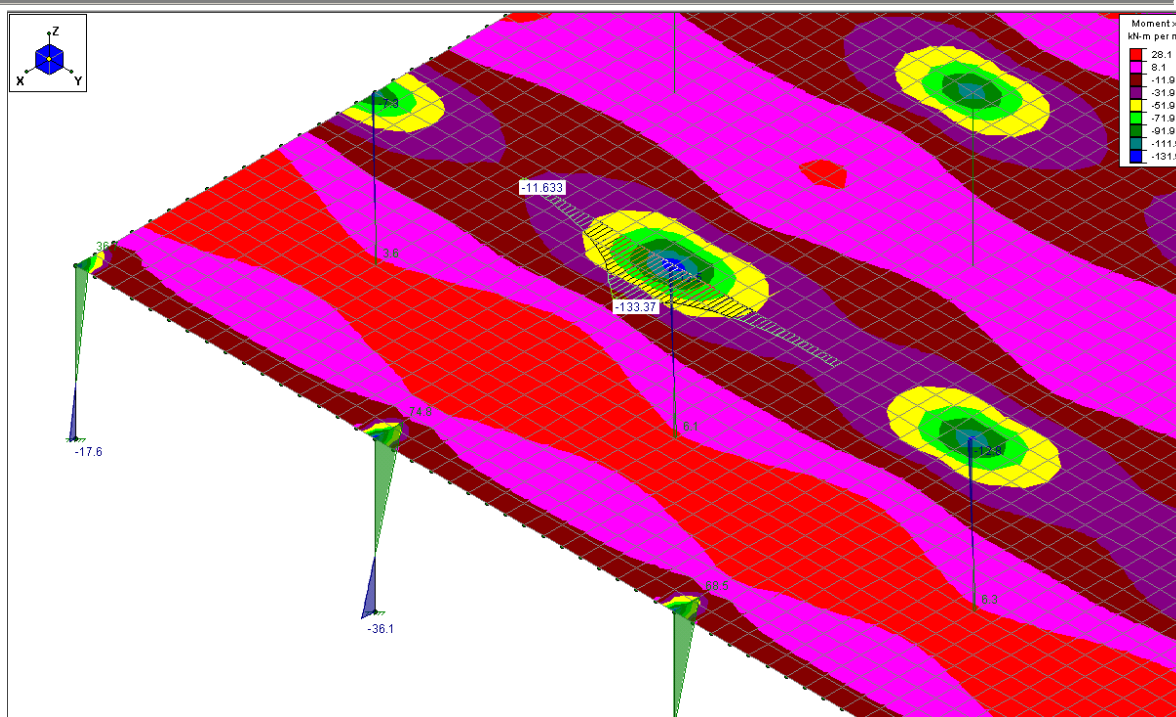
**Figura 3.x.** Variación de momento torsor  $M_{xy}$  en eje central de vano extremo

Una observación importante es, sin embargo, que el método de los pórticos virtuales es exacto en cuanto a cumplir las leyes del equilibrio mientras que el método de los EF y según se demostró en los ejemplos de las figuras 3.1 y 3.2 no lo es en estas importantes leyes. Otra observación importante es que el método de los pórticos virtuales obtendrá las integrales de los momentos flectores en cada eje y estos valores globales se repartirán posteriormente entre las denominadas franjas centrales y franjas de columnas, según se define en la figura 3.xx. Como orden de magnitud este reparto consistía en un 75% para las franjas de pilares y un 25% para las centrales. Así el método obtiene valores globales similares al obtenido en la expresión 3.2 para el caso simple de un solo vano y los repartía en dos zonas de armado uniforme. Una importante ventaja de este procedimiento es, por tanto, que elimina o suaviza los picos de armado comunes en los EF obteniendo estructuras seguras en cuanto el estado límite último se cumple igualmente pero con un armado más económico. En este sentido es curioso resaltar que un procedimiento tan potente y general como el de los EF ha contribuido a un aumento significativo de las cuantías de refuerzo en losas en comparación a procedimientos clásicos como el descrito e incluso incrementando también las patologías por flechas excesivas.



**Figura 3.x.** Franjas de armado para losa apoyada en pilares.

El planteamiento de armado en este libro es combinar las ventajas de los procedimientos clásicos de pórticos virtuales con el método de los EF y definir franjas de armado, tal como las mostradas en la figura 3.xx, en cada dirección. De esta forma se integran los momentos flectores en estas franjas y se definen momentos uniformes que eliminan los picos propios del modelar un soporte como apoyo puntual. De esta forma considerando la losa de la figura 3.xx con canto de 25cm, sometida a una carga uniforme permanente de 2kN/m<sup>2</sup> y una sobrecarga de uso de 3kN/m<sup>2</sup> se obtendría para el segundo eje los siguientes momentos:



**Figura 3.x.** Momentos flectores Mxx en franjas de armado eje 2.

Se observa que el momento máximo Mxx en el apoyo es de hasta 133kNm/m mientras que la integral del momento en toda la franja de armado sería de 340kNm siendo el valor uniforme correspondiente de sólo 56kNm/m (menos de la mitad del valor mediante EF). Obteniendo el momento total de la franja de columnas se tendría 274kNm (es decir un valor cercano a 75% del total obtenido) por lo que el valor de diseño sería de 91kNm/m. El valor en la franja central se obtendría directamente como la resta de ambos valores, es decir, 340kNm - 274kNm = 66kNm o por metro 23kNm/m.

En términos de armado y para un refuerzo con límite elástico de 51kN/cm<sup>2</sup> se tendría que suponiendo un mallazo mínimo superior e inferior para toda la losa del 10 cada 20x20cm el refuerzo necesario siguiendo directamente los resultados de los EF sería ligeramente superior a una barra del 16 cada 20cm. Empleando el armado en la franja de columnas se obtendría un armado ligeramente superior a solo una barra del 12 cada 20cm obteniéndose un ahorro muy significativo. Para la franja central el refuerzo sería inferior a una barra del 10 cada 20cm.

Conceptualmente es importante tener claro que para el estado límite último la capacidad es independiente a como se redistribuya el refuerzo total en la franja y, por otra parte, su importancia en el estado límite de servicio es baja. En este sentido para las flechas su importancia será prácticamente nula y solo podría ser relevante para el estado límite de fisuración. Por ello es común el ver fisuras en las zonas cercanas a los capiteles en las fibras superiores de losas apoyadas en pilares donde las cargas permanentes son significativas a las cargas de uso, como es el caso de parkings.

Otro aspecto interesante a indicar es que para las franjas extremas no es necesario el calcular la integral de los momentos flectores en la franja pues esta debe corresponder exactamente al momento flector en el pilar. Así para la figura 3.x el momento en el extremo superior del pilar del eje 2 es de 74,8kNm por lo que la integral total en la franja debe corresponder a este valor. En este caso el valor en la franja central será nulo y los más conveniente será concentrar el armado en el ámbito del pilar.

En estructuras irregulares con pilares que no formen una retícula o en casos con alternancia de cargas o con cargas puntuales significativas el diseñador debe escoger las franjas de armado según su criterio teniendo en cuenta que estas pueden ser tantas como EF se tenga. Es evidente que por simplicidad constructiva no se deben de escoger más de 2 o 3 armados distintos entre pilares. En este sentido un procedimiento práctico consiste en determinar la capacidad de la cuantía mínima de armado. Para losas se sabe que la cuantía mínima geométrica es de 0,0018 entre armado superior e inferior. Por tanto para la losa de 25 cm del ejemplo se necesitaría un armado de 2,25cm<sup>2</sup>/m para la malla superior y para la inferior. Disponiendo una malla del 10 cada 20cm se cumple sobradamente con este requerimiento y se tiene una capacidad mínima tanto a positivo como a negativo de 36kNm/m. Mediante la visualización de los resultados de los EF se determinan las zonas donde se excede este refuerzo mínimo y se procede a dimensionar el armado según las franjas adoptadas.

### 3.3 DIMENSIONAMIENTO A CORTANTE Y PUNZONAMIENTO

### 3.4 VERIFICACION POR FLECHAS Y VIBRACIONES EXCESIVAS

Para la estructura espacial compuesta empleando dos losas de hormigón y dados los espesores habitualmente empleados se puede considerar totalmente fisurada la losa inferior. De esta forma se obtiene una inercia fisurada similar a la de una EEM de una sola losa. Obsérvese que para losas mixtas con una sola capa de hormigón la inercia bruta y fisurada son exactamente iguales al no tener hormigón fisurado, siendo esta una de las ventajas de este sistema.

El cálculo final de la flecha, de forma similar a losas macizas, consistiría en determinar aquellos elementos finitos con momentos superiores al de fisuración en cada dirección calculando un canto equivalente para cada una. De esta forma se puede proceder como una losa ortotropa o simplemente calculando un canto ponderado en función de los momentos actuantes en cada dirección.

#### 4.2.4.2. Calculo de las flechas diferidas

Según el ACI 318-83 los efectos diferidos del hormigón tales como la retracción y la fluencia se determinan de manera exactamente análoga que para vigas. Así la deflexión función del tiempo se evalúa como la deflexión inicial multiplicada por:

$$\left( 2 - 1.2 \frac{A's}{As} \right) \geq 0.6 \quad (4.34)$$

Donde, A's y As son áreas de acero a compresión y a tracción, respectivamente. Así como es común en losas y reticulados el área de acero a compresión es cero, este factor corresponde a dos. Es decir la deflexión total diferida, más la inicial, sería de tres veces la inicial.

Es también posible determinar de manera más precisa las deflexiones diferidas empleando el programa Andrea [Bozzo 94]. Para ello se deben de evaluar las deformaciones diferidas del hormigón empleando algún procedimiento como por ejemplo el [CEB-FIP model code 1990], aplicando dichas deformaciones como acciones geométricas de sección. La retracción es una deformación atensional por lo que puede tratarse de manera independiente a las tensiones. La fluencia, sin embargo, requiere un análisis en el tiempo paso a paso, pues la fluencia cambia de estado tensional de la losa. Nótese que empleando el procedimiento simplificado del ACI las deformaciones diferidas no afectan el estado tensional de la losa y sólo son tomadas en cuenta para determinar la deflexión final. Sin embargo, para las losas aligeradas que comunmente se encuentra en edificaciones el procedimiento del ACI es suficientemente aproximado pues las redistribuciones de esfuerzos son inferiores a un 10%.

**La deflexión diferida o adicional en el tiempo, resultante del flujo plástico del hormigón y de las contracciones de fragua de los elementos en flexión podrá estimarse multiplicando la deflexión inmediata causada por las cargas sostenidas (carga muerta y la porción de carga viva que se prevé actuará permanentemente) por el factor  $r$  que se obtiene por:**

$$r = \frac{F}{1 + 50p'} \quad (4.35)$$

**Donde:  $p'$  es la cuantía de acero en compresión ( $p' = A's/bd$ ) en el centro del tramo para elementos simples o continuos y en la sección de apoyo para voladizos.**

**El factor  $F$  depende del tiempo en que se desee evaluar la deflexión diferida y podrá tomarse:**

- F = 1.00 (3 meses)**
- F = 1.20 (6 meses)**
- F = 1.40 (12 meses)**
- F = 2.00 (5 años o más)**

***La deflexión máxima permisible será la suma de la deflexión inmediata y la deflexión diferida.***

$$\delta_{MAXIMA} = \delta_{INSTANTANEA} + \delta r_{DIFERIDA} \quad (4.36)$$

Las deflexiones máximas permisibles recomendadas por el ACI para losas aligeradas unidireccionales se presentan en la tabla 4.1. Como los criterios que limitan la deflexión máxima en losas aligeradas unidireccionales son similares a los que limitan las deflexiones de las losas, bidireccionales, dicha tabla puede emplearse para ambos casos. La deflexión máxima según este código varía entre luz/180 a luz/480, dependiendo de una serie de factores tales como si la losa es, de piso o de techo, elementos no estructurales etc. No se especifica en el código cual es la luz a considerar, aunque es

probable que corresponda la máxima luz entre columnas. Esta dimensión se mide entre las caras de los soportes, si no hay vigas y entre las caras de las vigas si las hubiera.

<b>Tabla 4.1 Deflexión máxima permisible</b>		
<b>Tipo de elemento</b>	<b>Deflexión a considerar</b>	<b>Deflexión máxima</b>
Techos planos que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por deflexiones excesivas.	Deflexión instantáneas debida a la carga viva.	L/180 (b)
Piso que no soporten ni estén ligados a elementos no estructurales susceptibles de sufrir daños por deflexiones excesivas.	Deflexión instantánea debido la carga viva.	L/360
Piso o techos que soporten o estén ligados a elementos no estructural susceptibles de no sufrir daños por deflexiones excesivas.	La parte de la deflexión total que ocurre después de la unión de los elementos no estructurales (la suma de la deflexión diferida debida a todas las cargas sostenidas, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional). (a)	L/480 ©
Piso o techos que soporten o estén ligados a elementos no estructurales no susceptibles de sufrir daños por deflexiones excesivas.		L/240 (d)

L= Luz de cálculo considerado la distancia centro a centro de los apoyos.

- a) Las deflexiones diferidas se pueden reducir según la cantidad de la deflexión que ocurra antes de unir los elementos no estructurales. Esta cantidad se determina basándose en los datos de ingeniería aceptables con relación a las características tiempo-deformación de elementos similares a los que se están considerado.
- b) Este límite no tiene por objeto constituirse en un resguardo contra el estancamiento de aguas. Este último se debe verificar mediante cálculos de deflexiones adecuados, incluyendo las deflexiones adicionales debidas al agua estancada, y considerando los efectos a largo plazo de todas las cargas sostenidas, la contraflecha, las tolerancias de construcción y la confiabilidad en las previsiones para el drenaje. El límite no tiene por objetivo el controlar las deflexiones debido a la acumulación adicional de agua o nieve.

- c) Este límite se puede sobrepasar si se toman medidas apropiadas para evitar el daño a los elementos no estructurales (elementos apoyados o unidos).
- d) Pero no mayor que la tolerancia establecida para los elementos no estructurales. Este límite se puede sobrepasar si se proporciona una contraflecha de modo que la deflexión total menos la contraflecha no exceda la tolerancia de los elementos no estructurales.
- e) La deflexión a largo plazo se determina empleando la ecuación 4.35 o empleando un análisis más preciso y puede ser calculado partir de la fijación de los elementos no estructurales.

Con el objetivo de controlar las deflexiones el ACI proporciona unos espesores mínimos, a falta de cálculos precisos para obtener las deflexiones, lo cual claramente, no es el caso empleando elementos finitos. Si la deflexión máxima en una losa excede el límite permisible se puede disminuir la deflexión empleando tres alternativas.

*1 Aumentar el canto de la sección.*

Al aumentar el espesor de la sección se aumenta considerablemente su rigidez pues ésta es una función cúbica del espesor. Con esta alternativa se aumenta el peso propio, el cual es sumamente importante en luces mayores o iguales a 10 mt. *Una alternativa es aumentar significativamente la rigidez sin un aumento considerable del peso propio, es emplear una losa compuesta de hormigón con celosía espacial.*

**2. Aumentar el módulo de elasticidad del hormigón.**

El módulo de elasticidad se puede incrementar aumentando la resistencia a compresión del hormigón, según el ACI, el módulo de elasticidad del hormigón es función de la raíz cuadrada de su resistencia a compresión. Sin embargo ésta no es una alternativa muy eficiente pues al aumentar la resistencia del hormigón de 175 kgs/cm<sup>2</sup> a 210 kgs/cm<sup>2</sup> sólo se lograría disminuir la deflexión máxima un 10%.

**3. Disminuir las deformaciones diferida.**

La tercera alternativa consiste en proporcionar acero de compresión o en dejar deformar la losa durante un tiempo antes de fijar los elementos no estructurales. Las deformaciones diferidas del hormigón disminuyen con el tiempo siendo muy importantes en los primeros días.

Un procedimiento de complejidad intermedia para calcular las flechas diferidas consiste en el propuesto por Murcia y Bozzo (1994). Según este procedimiento y para losas mixtas con una sola capa de hormigón en compresión se tiene que la flecha adicional por fluencia es

$$\lambda = \frac{x - \frac{e}{2}}{d - \frac{e}{2}} \varphi \quad (4.37)$$

donde  $e$  es el espesor de la capa de hormigón,  $x$  la profundidad de la fibra neutra,  $d$  el canto útil y  $\varphi$  es el coeficiente de fluencia.

#### 4.2.4.3. Contraflecha.

La contraflecha es la curvatura de un elemento a flexión para contrarrestar algunas o todas las deflexiones debidas a las cargas de servicio. El objetivo generalmente es eliminar la apariencia de combadura o hacer coincidir la elevación del elemento con la de los componentes adyacentes de la construcción cuando se carga el elemento. En estructuras no convencionales como la Estructura espacial compuesta o losa reticular en dos direcciones con aplicación en grandes luces, es muy importante contrarrestar las deflexiones mediante una contraflecha y deben especificarse en los documentos de diseño.

#### 4.2.4.4. Prueba de carga

Cuando sea necesario hacer una prueba de carga de un elemento o parte de una estructura, la carga a aplicarse será igual a 0.3 veces la carga muerta en servicio más 1.7 veces la carga de prueba se aplicará sin impacto a la estructura de manera que no se produzca un efecto de arco en los materiales de carga

La carga de prueba se aplicará sin impacto a la estructura de manera que no se produzca un efecto de arco en los materiales de carga.

La carga de prueba se aplicará por incrementos y se tomarán lecturas de las deflexiones al final de la aplicación de cada incremento, La carga de prueba se mantendrá durante 24 horas y se tomarán lecturas de las deflexiones al final de dicho período. Luego se quitará la carga y 24 horas después se tomarán lecturas adicionales de las deflexiones.

Si durante la prueba o al momento de retirar la carga del elemento o parte de la estructura muestra signos de falla, sería necesario hacer los cambios o modificaciones apropiadas para que la estructura tenga una capacidad menor.

Se considerará que la estructura ha pasado con éxito la prueba de carga, cuando la flecha máxima al cabo de 24 horas de aplicada la carga de prueba se mantiene igual o menor que:

$$D = \frac{L^2}{20000} x T$$

D= Flecha en centímetros

L= Luz

T = Peralte

Y después del tiempo de recuperación de la deflexión de 24 horas posteriores al retiro de la carga de prueba será de por lo menos el 75% de la deflexión máxima anotada.

$$D = \frac{L^2}{20000} x T$$

Si la deflexión máxima D, es menor que:

El requisito de recuperación no se tomará en consideración.

Para el caso de voladizos la luz ( L ) será considerada como dos veces la distancia del apoyo al extremo y la deflexión se corregirá por movimientos de apoyo.

Las construcciones que no muestren una recuperación mínima del 75% de la deflexión máxima puede ser probada nuevamente, la segunda prueba de carga se realizará después que haya pasado por lo menos 72 horas de haberse retirado la carga de la primera prueba. La estructura no debe mostrar evidencia de falla en el nuevo ensayo y la recuperación de la deflexión causada por la segunda carga será por lo menos del 75%

A continuación y como ejemplo de una prueba de carga efectuada se presentan los resultados para las aulas masivas de la Universidad Nacional de Ingeniería. Esta estructura actualmente en funcionamiento tiene unas luces aproximadas de 20x20m sin pilares intermedios con una sobrecarga de uso de 680Kg/m<sup>2</sup>.

### **COPIA DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA DE CARGA**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
Av. Tupac Amaru s/n- Apartado 1301-Teléfono 81-1070  
UNI-Lima-Perú

#### **INFORME**

Del : Laboratorio de Ensayo de Materiales

Unidad 1 de Laboratorios

A : ARQ. ALFONSO MENDIZABAL, Director de Equipamiento Universitario  
 Asunto : Prueba de Carga estática vertical en techo de estructuras espacial compuesto (primer piso)

Proyecto 73.819-C

Fecha: 27 de Agosto de 1973

### 1.-DESCRIPCION DE LA PRUEBA

La prueba de carga estática vertical, se realizó sobre la zona de la estructura del techo del primer piso, según se indica en el plano adjunto.

La carga se aplicó mediante bolsas de cemento, utilizándose 16 bolsas de cemento por metro cuadrado. Las deflexiones se medieron con micrómetros de carátula de 0.01 mm de precisión, según se muestra en el plano adjunto del área cargada de la estructura.

### 2.- CARGAS IMPUESTAS

Las cargas aplicadas en la prueba de carga fueron de acuerdo con lo especificado por el peticionario.

- Carga Muerta I - Existente por las graderías
- Carga de Prueba II - 16 bolsas de cemento/m<sup>2</sup> x 42.5 Kg = 680 kg/m<sup>2</sup>

### 3. RESULTADOS

C A R G A S	Deformó metros mm						
	1	2	3	4	5	6	7
Carga (I)							
Deflexiones Iniciales	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Carga (I+II)							
Deflexiones	0.78	2.40	2.25	3.10	2.47	2.73	1.08
Carga (I)							
Deflexiones remanentes	0.11	0.30	0.49	0.02	0.43	0.53	0.38
Recuperación %	86	87	78	99	83	81	65

### FISURACION

No se observó fisuración visible en el área de la estructura bajo la prueba de carga.

ING. CAROS PEREZ BARDALES

Jefe de la Unidad de Laboratorio.

#### 4.2.5 Verificación por Fisuración

El agrietamiento es un factor importante en el diseño de losas pues perjudica el aspecto estético de la losa, aumentan los desplazamientos y, además, las fisuras longitudinales paralelas a las armaduras son un factor determinante en su resistencia contra la corrosión (las fisuras transversales o de flexión no son determinantes en la resistencia a la corrosión). El hormigón armado siempre se fisura debido a su baja resistencia a la tracción. Estas fisuras, sin embargo, son en muchos casos difíciles de apreciar a simple vista. El objetivo principal de la verificación es, por tanto, limitar el ancho de las mismas.

Desde un punto de vista estético el ancho máximo de una grieta puede probablemente situarse entre 0.25 a 0.38 mm (es decir de 0.01 a 0.015 pulg). Este intervalo, sin embargo, depende de varios factores como iluminación, ubicación de la fisura, uso de la losa, etc.

La vulnerabilidad del hormigón armado contra la corrosión está claramente disminuida por el mayor espesor de grietas. Por ello en ambientes agresivos es sumamente importante limitar el ancho de grietas. No existe un consenso sobre cual es el ancho de grieta permisible aunque algunos estudios indican que si las grietas son de un ancho máximo de 0.41cm (ó 0.016 pulg) no influyen en la corrosión, aún para medios agresivos [Park y Gamble87]. La tabla 4.2 presenta el ancho máximo de grietas, según el comité 224-1980 del ACI.

<i>Tabla 4.2 Ancho máximo de grietas según ACI</i>	
Ambiente	W max (mm)
Seco, interior	0.410
Húmedo, exterior	0.305
Salado	0.152
Depósito de agua	0.102

El hormigón armado se agrieta principalmente debido a:

- (1) *Asentamiento plástico del hormigón durante el fraguado.*
  - (2) *Agrietamiento* debido a cambios volumétricos durante el fraguado y posteriormente debido a cambios de temperatura.
  - (3) *Esfuerzos de tracción* en el hormigón debidos a tracción directa, flexión, cortante o torsión.
- Las grietas debidas a los asentamientos plásticos se pueden evitar con una buena dosificación de la mezcla empleando un contenido de agua / cemento bajo y su vibrado. También se pueden disminuir evitando el vaciado del hormigón en elementos profundos y empleando pretensado.

- Para evitar el agrietamiento debido al calor de hidratación durante el fraguado y posteriormente debido a cambios de temperatura el ACI 318-83 proporciona cuantías mínimas de refuerzo.
  - (a) Para aceros con límite de fluencia entre 2800 kgs/cm<sup>2</sup> y 3500 kgs/cm<sup>2</sup> (grado 40 a 50) la cuantía mínima es de 0.002.
  - (b) Para aceros con límite de fluencia de 4200 kgs/cm<sup>2</sup> (grado 60) cuantía mínima es de 0.0018
  - (c) Para aceros con límite de fluencia a 4200 kgs/cm<sup>2</sup> medido a una deformación de fluencia del 0.35 % la cuantía mínima es de:

$$\frac{0.0018 \cdot f_y}{f_s} \text{ donde: } F_s > f_y \quad (4.37)$$

La cuantía mínima no debe de ser inferior a 0.0014 en ningún caso. La separación máxima del acero de refuerzo no debe excede de 50cm (20pulg) ni siete veces el espesor de la losa. Para losas en dos capas de Estructura Espacial compuesta en las zonas críticas el espaciamiento no debe de exceder de tres veces el espesor de las dos losas.

- Los esfuerzos de tensión en losas se deben principalmente a su flexión bajo cargas perpendiculares. Para determinar el ancho de la grieta y su separación debido a estas cargas existen básicamente tres alternativas:
  - (1) Teoría clásica de adherencia - deslizamiento o “bond-slip theory”.
  - (2) Teoría de no - deslizamiento o “no-slip theory”.
  - (3) Procedimientos estadísticos.

Los más empleados en la práctica son la teoría clásica y los procedimientos estadísticos, los cuales se detallan a continuación.

Para presentar la teoría clásica considérese una sección de tridilosa sometida a cargas verticales las cuales originan esfuerzos de tracción máximos en su tramo central. El diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4.10 presenta una sección de la tridilosa separadas por dos grietas verticales con espaciamiento “s”. Cada varilla de refuerzo tiene un área de hormigón asociado “Ac”. La teoría clásica asume una variación promedio constante de los esfuerzos de adherencia entre el hormigón y el acero “um”, de manera tal que se obtenga la variación de tensiones para el hormigón y el acero presentada en la figura 4.10. Se producirá una grieta en el hormigón si el esfuerzo de tracción excede su resistencia a la tracción “ft”.

Según esta teoría los espaciamientos mínimos y máximos entre grietas están definidos por:

$$\frac{f_t A_c}{\pi d_b u_m} \leq S \leq \frac{2 f_t A_c}{\pi d_b u_m} \quad (4.38)$$

Donde:

$d_b$  es el diámetro de la varilla de refuerzo. Debe indicarse que no es posible obtener de manera exacta tanto  $d_b$  como  $u_m$ . Sin embargo en la práctica un valor constante para el esfuerzo de adherencia que funciona adecuadamente es de:

$$u_m = 500 \text{ psi}$$

El espesor de grieta se obtiene de integrar las deformaciones del hormigón y del acero entre grietas, aunque para simplificar el problema se suelen ignorar las deformaciones del hormigón. La expresión que determina el ancho de grietas es:

$$w_{max} = \frac{f_{s_{max}} 2 f_t A c}{E_s \pi d_b u_m} \quad (4.39)$$

Donde  $f_{s_{max}}$  es el esfuerzo de tracción máximo en el acero y  $E_s$  su módulo de elasticidad.

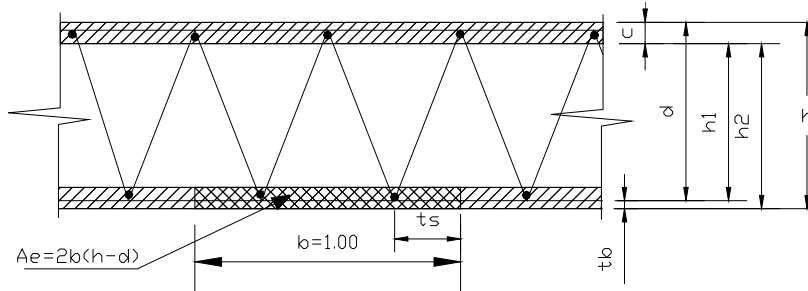
Los procedimientos estadísticos generalmente proporcionan mejores resultados que las teorías clásicas y del no-deslizamiento. El procedimiento estadístico más empleado en Estados Unidos, e incorporado al ACI, corresponde a Gergely y Lutz [68]. Este procedimiento empírico considera que los parámetros más importantes para determinar el ancho de grieta es el esfuerzo del acero, el área efectiva de hormigón a tracción, gradiente de deformación desde el acero a la cara de hormigón en tracción, número de varillas y finalmente, recubrimiento lateral inferior. De todos ellos el más importante es el área de acero. La expresión propuesta para el ancho de grieta en el extremo a tracción es:

$$w_{max} = \sqrt[3]{t_b A \psi f_s} 10^{-6} \text{ (cm)} \quad (4.40)$$

$$w_{max} = \frac{\sqrt[3]{t_b A}}{1 + \frac{2 t_s}{3 h_1}} f_s \cdot 10^{-6} \text{ (cm)} \quad (4.41)$$

En estas ecuaciones,  $A$  es el área de hormigón que rodea cada barra definida por la relación ( $A = A_e / N$ ) donde:  $A_e = 2b(h-d)$ ,  $N$ =número de varillas de la fig 4.10,  $t_b$  es el recubrimiento inferior medido desde el centro de la varilla más baja,  $t_s$  el recubrimiento lateral,  $\psi = h_2/h_1$ , ( $h_1$  y  $h_2$  así como cada uno de los se definen en la fig 4.10.

El significado de cada uno de estos parámetros está ilustrado en la fig 4.10



**Figura 4.10** *Parámetros que influyen en el ancho de grietas según Gergely-Lutz*

El ancho de grietas según la propuesta de la Portland Cement Association (P.C.A.), para calcular el ancho máximo de grietas el nivel del acero de refuerzo es la siguiente:

$$w_{max} = 2.6\sqrt[4]{A} f_s x 10^{-6} \text{ (cm)} \quad (4.42)$$

Esta ecuación se obtuvo después de una serie de ensayos de laboratorio ya que la ec. (4.39) sobrestima la influencia del diámetro y que el ancho de grieta depende principalmente del esfuerzo en el acero,  $f_s$  y del área efectiva de hormigón que rodea a cada barra,  $A$  se obtiene dividiendo el área efectiva  $A_e$  entre el número de varillas. El esfuerzo del acero,  $f_s$  puede calcularse con la ecuación

$$f_s = \frac{M}{A_s z},$$

en puede suponerse un valor aproximado de  $z=7d/8$ . La ecuación (4.42) es aplicable siempre que  $f_s$  sea menor que el esfuerzo de la fluencia,  $f_y$ , que el valor de  $A$  esté comprendido entre 20 y 320  $\text{cm}^2$ , y que las barras de refuerzo sean corrugadas.

Las formulas presentadas difieren no solo en los resultados también en las variables que intervienen, la correlación de ensayos y resultados no es tan buena como en el cálculo de resistencia, por la variabilidad misma del fenómeno de agrietamiento y por muchos factores que intervienen (tipo de barra, resistencia del hormigón, recubrimiento, tipo de curado, condiciones de ambiente, etc).

#### 4.2.5.1 Fisuración en losas de EEM

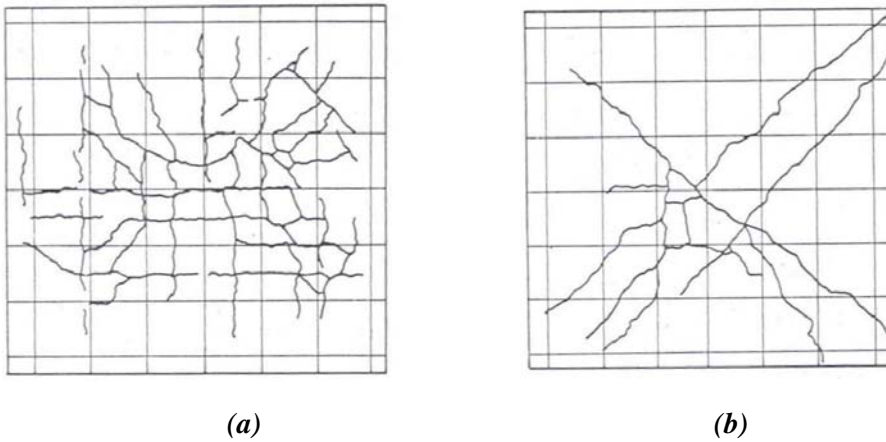
El número de ensayos para determinar el agrietamiento en losas macizas apoyadas perimetralmente es reducido más aún de losas como la Estructura Espacial mixta. Esto se debe principalmente a que la fisuración de losas no ha sido un factor importante en la práctica. Se ha realizado un número limitado de ensayos con malla soldada<sup>1</sup> en los que se encontró que pueden formarse, bajo cargas de trabajo, las dos configuraciones de agrietamiento mostrados en la figura 4.12 (a,b), en la primera de estas configuraciones las grietas se forman siguiendo las líneas de refuerzo, mientras que en la segunda, las grietas se forman siguiendo líneas diagonales. La formación de una u otra configuración depende del valor de un parámetro llamado índice de malla que se define como.

$$I = \frac{d_b s_t}{\rho_t},$$

---

<sup>1</sup> Orenstein y E.G. Nawy, "Control de ancho de grieta en hormigón reforzado de dos losas sujeto a distribución de carga uniformemente" (1970)

Donde  $I$  es el índice de malla,  $d_b$  es el diámetro de los alambres de refuerzo en dirección longitudinal. Cuando el valor de  $I$  es menor de 1000  $\text{cm}^2$  se forma la configuración ortogonal mostrada en figura 4.12a y cuando es mayor, se forma la configuración diagonal mostrada en figura 4.12b.



**Figura (4.12)** Configuración de agrietamiento de losas (Orenstein y Nawy). a) Configuración Ortogonal, b) Configuración diagonal

Finalmente debe de indicarse que no existe ningún procedimiento preciso para calcular el ancho de grietas, aún en condiciones controladas como puede ser en un laboratorio de estructuras. Por ello los valores obtenidos empleando las expresiones 4.37-4.42 u otra, deben tomarse como indicativos. Por otro lado el *ancho de grieta no es un factor determinante en el diseño de losas*, por lo menos para las empleadas comúnmente en edificación. Procedimientos efectivos para limitar el ancho de grietas son el de emplear barras delgadas no demasiado espaciadas en las zonas de tracción del hormigón, y emplear hormigón de buena calidad con baja permeabilidad obtenida usando relaciones agua/cemento bajas y un cuidadoso curado. En casos especiales se ha empleado en la práctica refuerzos de fibras cortas sintéticas reduciéndose el ancho de fisura.