

# CAPITULO

# 2

## ANALISIS DE LOSAS PLANAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

---

## 2.1 ANÁLISIS DE LOSAS POR LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

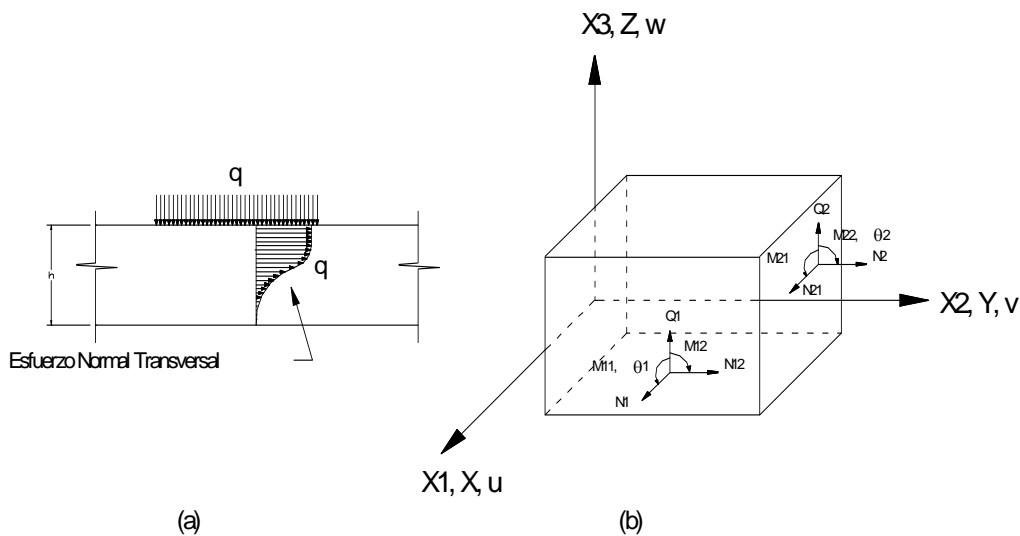
### 2.1.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales que se detallan corresponden a las losas elásticas – con respuesta lineal o no- sujetas a cargas perpendiculares en su plano. Se asumen desplazamientos pequeños con relación al espesor de la losa, no incluyendo la no-linealidad geométrica, así como la no-linealidad en las cargas. Por ello el equilibrio siempre se plantea en la configuración inicial y la dirección de las cargas se considera independientemente de la configuración deformada. Esta última no linealidad es la que se da en estructuras sometidas a la acción del viento o en estructuras sumergidas en líquidos donde la presión hidrostática es perpendicular a la deformada estructural. Las características del material, sin embargo, pueden corresponder a materiales con módulo de elasticidad variable.

El análisis de placas difiere del de un sólido tridimensional en que aquellas tienen una dirección considerablemente menor a las otras dos, lo que permite hacer las siguientes simplificaciones:

- El esfuerzo normal en la dirección transversal (vertical normalmente) no es significativo
- Hipótesis de Kirchhoff o de las secciones planas.
- La deformación por corte es constante en la dirección transversal

Es fácil verificar que el esfuerzo normal en la dirección transversal, de hecho no es nulo en el plano cargado de la losa, como se ilustra en la figura 2.1(a). Sin embargo, su importancia relativa en la deformación de la losa, con respecto a los esfuerzos de flexión es pequeña (por ejemplo 10kN/m<sup>2</sup> ó 1N/cm<sup>2</sup> son una carga alta para una losa pero en términos de tensión normal a flexión no son significativos), y por ello no se incluye en su análisis y diseño.



**Figura 2.1** (a) Variación del esfuerzo normal en el espesor (b) Convención de signos adoptada para el capítulo

La hipótesis de Kirchhoff o de las secciones planas es la hipótesis básica del análisis de losas. Esta hipótesis establece que las secciones planas antes y durante la deformación permanecen planas. En virtud de esta hipótesis de compatibilidad se asume un plano neutro, sin deformación, similar al eje neutro para elementos lineales, y por ello esta hipótesis es similar a la de Navier-Bernoulli en vigas

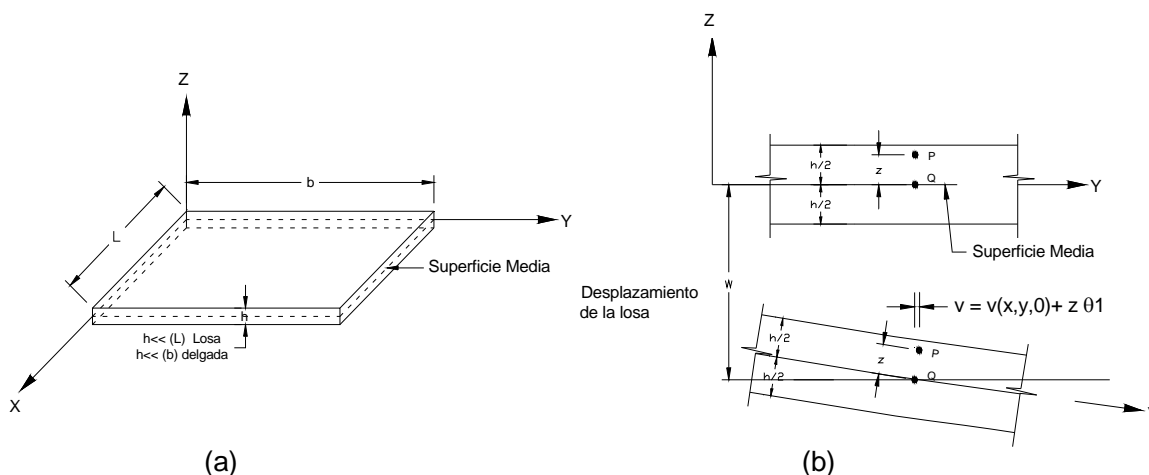
Considérese el diagrama de cuerpo libre infinitesimal mostrado en la Fig 2.1(b), el cual muestra la convención de signos habitual en losas. La hipótesis de kirchhoff permite expresar los desplazamientos en el plano de la losa según:

$$u = u(x, y, 0) + z\theta_1 \tag{2.1}$$

$$v = v(x, y, 0) + z\theta_2 \tag{2.2}$$

Donde:  $\theta_1, \theta_2$  son los giros y  $u(x, y, 0), v(x, y, 0)$  son los desplazamientos del plano neutro fig (2.2). Los desplazamientos del plano neutro se denominarán en adelante  $u_0, v_0$  respectivamente. Es importante resaltar que en virtud de esta hipótesis los giros  $\theta_1, \theta_2$  no son funciones de la coordenada  $Z$ .

Nótese con referencia a la convención de signos adoptada que un momento flector positivo  $M_{xx}$  (ó  $M_{11}$  en la figura) corresponde a una tensión normal  $\sigma_{xx}$  positiva multiplicada por una distancia vertical también positiva, tal como se define en las ecuaciones (2.5)



**Figura 2.2** (a) Geometría de la losa, (b) Deformación antes y después de la carga

La deformación por corte no suele incluirse en el análisis y diseño de losas debido a su poca influencia en la determinación de fuerzas y desplazamientos para la mayor parte de las losas empleadas en construcción. La deformación por corte es importante en el análisis estructural de losas de gran espesor en relación a la luz libre, siendo una situación antieconómica. Sin embargo, para dar una mayor

generalidad las ecuaciones que se detallan a continuación incluyen deformación por corte. Por otra parte, como es común en el análisis de losas gruesas, para limitar su complejidad dichas deformaciones se consideran de forma aproximada como constantes en su espesor.

### 2.1.2 Ecuaciones Diferenciales del Equilibrio

En el análisis de losas se emplean como medida de esfuerzo las fuerzas y los momentos resultantes de integrar en el espesor las tensiones normales y tangenciales según se indica a continuación.

Fuerzas en el plano o fuerzas de membrana.

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_z \sigma_{xx} dz \\ N_{yy} &= \int_z \sigma_{yy} dz \\ N_{xy} &= \int_z \tau_{xy} dz \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cortantes transversales:

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_z \tau_{xz} dz \\ Q_y &= \int_z \tau_{yz} dz \end{aligned} \quad (2.4)$$

Momentos flectores y torsor:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_z \sigma_{xx} z dz \\ M_{yy} &= \int_z \sigma_{yy} z dz \\ M_{xy} &= \int_z \tau_{xy} z dz \end{aligned} \quad (2.5)$$

Estas nuevas variables son funciones de las coordenadas X,Y e independientes de la coordenada Z. Por ello su representación se puede realizar en el plano de la losa por medio de curvas de nivel. El signo positivo para un momento  $M_{xx}$  se obtiene de una tensión positiva  $\sigma_{xx}$  multiplicada por una distancia z también positiva.

Si se representan las fuerzas en el plano en un elemento diferencial dx,dy, se obtiene la variación mostrada en la fig. 2.3 y si se representan los momentos y cortantes, las de la fig. 2.4(a)(b). Considerando el equilibrio del elemento diferencial se plantean las siguientes ecuaciones:

Equilibrio de fuerzas en el plano.

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = q_x$$

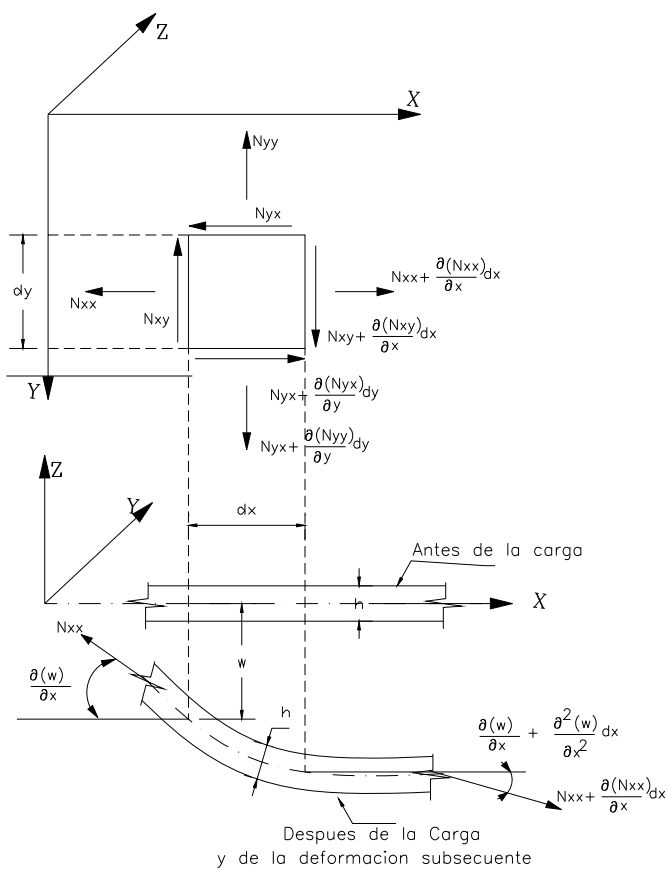
$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = q_y \tag{2.6}$$

Equilibrio de momentos y cortantes

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_y \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q$$



**Figura 2.3** Variación de fuerzas normales y tangenciales

Las ecuaciones (2.6) o de equilibrio en el plano son independientes de las ecuaciones (2.7) o de la flexión por lo que pueden tratarse por separado. Según la convención de signos adoptada, y dado que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $M_{xy}$  es igual en magnitud y signo a  $M_{yx}$ .

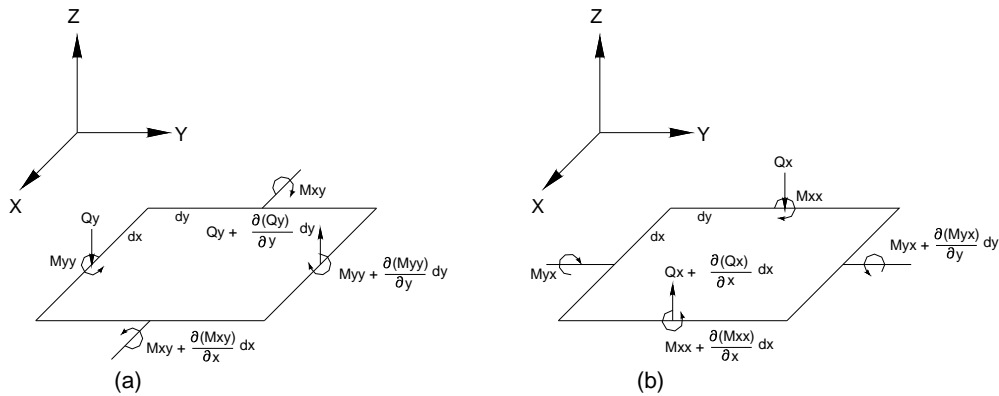
Usando las fórmulas (2.7), es posible desarrollar la que se conoce como “la ecuación de la Losa”. Eliminado los cortantes se llega a la formulación sumando las fuerzas en la dirección vertical z, con una carga normal a la losa llamada (q) :

$$\frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_{yy}}{\partial y} dxdy + qdxdy = 0 \tag{2.8}$$

El diferencial de área dxdy desaparece y las derivadas parciales de Q pueden obtenerse de la ecuación 2.7. Sustituyendo esas derivadas parciales se obtiene:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q(x, y) \tag{2.9}$$

Esta ecuación diferencial de segundo grado indica, como para todo problema estructural, que las leyes del equilibrio son independientes de las características de los materiales y su estado de elasticidad o plasticidad. Esta observación tiene importantes repercusiones prácticas toda vez que el equilibrio debe mantenerse con independencia de la posible fisuración o redistribución de esfuerzos producto de esta. Por tanto según el nivel de fisuración los momentos a lo largo de un eje de una losa podrán variar aunque su sumatoria total debería cumplir con el equilibrio. Dicho en otras palabras, errores en el equilibrio son más significativos que errores en las leyes del material y, por ejemplo, un 10% de error del lado de la inseguridad en el equilibrio es grave mientras que el mismo porcentaje en las propiedades mecánicas del material no tiene mayor repercusión. Métodos de análisis clásicos, como el de los pórticos virtuales para losas, se basan en mantener de forma exacta el equilibrio, aproximando las de compatibilidad.



**Figura 2.4** (a) Momento con respecto al eje X, (b) Momento con respecto al eje Y

Siendo los momentos funciones de los ejes de coordenadas escogidos, pueden obtenerse sus valores máximos y mínimos, llamados valores principales, según ciertos ejes n,t. Para dichos ejes el momento torsor será nulo, de manera exactamente análoga al círculo de Mohr para tensiones. Considérese la convención de signos indicada en la fig.2.5 Como los momentos son tensores de segundo orden su transformación a otro sistema de coordenada n-t es según:

$$\begin{bmatrix} M_{nn} & M_{nt} \\ M_{tn} & M_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Donde:  $c = \cos(\alpha)$ ,  $y$ ,  $s = \sin(\alpha)$ . Operando convenientemente esta ecuación se transforma según:

$$\begin{Bmatrix} M_{nn} \\ M_{tt} \\ M_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Empleando la condición  $M_{nt}=0$ , se obtiene la siguiente condición para los momentos principales:

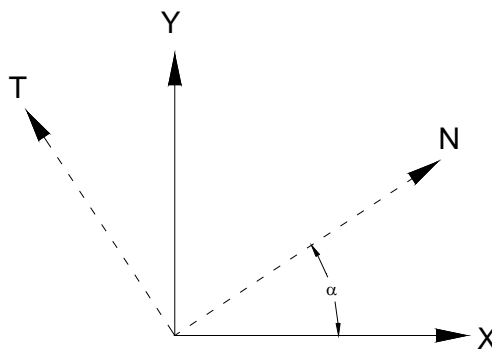
$$\tan(2\alpha) = -\frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} \quad (2.12)$$

Con la cual los momentos principales máximos y mínimos son:

$$M_1 = \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \quad (2.13)$$

$$M_2 = \frac{M_x + M_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \quad (2.14)$$

Que deben emplearse, teóricamente, en el diseño de la losa. Dado que en estructuras de hormigón armado tal alineación de las armaduras no es, en general posible, los momentos según ejes locales sólo se emplean para bordes inclinados con refuerzos de zuncho o en losas metálicas con aplicaciones industriales donde la isotropía del material lo permite.



**Figura 2.5** Rotación de ejes coordenados

### 2.1.3 Ecuaciones Diferenciales de la Compatibilidad

Las ecuaciones diferenciales de la compatibilidad empleadas para un análisis de primer orden son:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.16}$$

Empleando la hipótesis de Kirchhoff (Eq. 2.1 y 2.2) estas ecuaciones pueden escribirse como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_1}{\partial x}\tag{2.17}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v^0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_2}{\partial y}\tag{2.18}$$

$\varepsilon_{zz} = 0$ , es decir,  $w = f(x, y)$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right)\tag{2.19}$$

$$\gamma_{xz} = \theta_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\tag{2.20}$$

$$\gamma_{yz} = \theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\tag{2.21}$$

Si la deformación vertical por cortante ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) no se incluye, estas ecuaciones se transforman en las siguientes:

$$\gamma_{xz} = 0, \text{ ó } \theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.22)$$

$$\gamma_{yz} = 0, \text{ ó } \theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.25)$$

$\varepsilon_{zz} = 0$ , es decir,  $w = f(x, y)$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.26)$$

Esta simplificación es válida para las losas lo suficientemente delgadas para que la deformación por corte no sea importante, pero lo suficientemente gruesas para que las fuerzas de membrana o fuerzas en su plano, tampoco lo sean. Dadas las limitaciones de las flechas en losas de hormigón armado en edificaciones estas condiciones se cumplen habitualmente.

A las funciones  $\frac{\partial \theta_1}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \theta_2}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \theta_1}{\partial y}$ , y  $\frac{\partial \theta_2}{\partial x}$  se les conoce como curvatura de la superficie, según X, Y, XY, e

YX y se les denota comúnmente por  $X_{xx}$ ,  $X_{yy}$ ,  $X_{xy}$ ,  $X_{yx}$ , respectivamente. En el caso de no tener deformación por cortante,

$$X_{xy} = X_{yx} \quad (2.27)$$

pues para una función continua de orden C1 (con continuidad en la función y su primera derivada),  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ . Así y para este caso particular, se obtienen las conocidas expresiones:

$$\begin{aligned} X_{xx} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ X_{yy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ X_{xy} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Siendo las curvaturas funciones de los ejes coordenados escogidos, pueden obtenerse sus valores máximos y mínimos, llamados valores principales, según ciertos ejes n y t. Para dichos ejes la curvatura XY es nula, y se obtendrán expresiones exactamente análogas a las obtenidas para los momentos. A la suma de las curvaturas según dos planos normales se le conoce como curvatura media y se puede demostrar que es independiente del sistema de referencia.

### 2.1.4 Relaciones de Esfuerzo – Deformación

Para un material isotrópico con módulo de elasticidad (E), de poisson( $\mu$ ) y de cortante (G), las ecuaciones de esfuerzo – deformación pueden expresarse según:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

En el caso de un material ortotrópico, estas relaciones se describen como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-n\mu_{21}^2} & \frac{\mu_{21}E_{11}}{1-n\mu_{21}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu E_{11}}{1-n\mu_{21}^2} & \frac{E_{11}}{n(1-\mu_{21}^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

donde:  $n = \frac{E_{11}}{E_{22}}$  es la relación entre módulos de elasticidad transversales, la cual se emplea para representar rigideces distintas en ambas direcciones.

Multiplicando por z e integrando según el espesor, estas relaciones pueden expresarse en términos de momentos y cortantes, que son las medidas de esfuerzo adoptadas para el análisis:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \sigma_{xx} z dz \\ \int \sigma_{yy} z dz \\ \int \tau_{xy} z dz \\ \int \tau_{xz} z dz \\ \int \tau_{yz} z dz \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \int \varepsilon_{xx} z dz \\ \int \varepsilon_{yy} z dz \\ \int \gamma_{xy} z dz \\ \int \gamma_{xz} z dz \\ \int \gamma_{yz} z dz \end{array} \right\} \quad (2.31)$$

De esta forma reemplazando las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.17 a 2.21), para una losa isotr3pica en la cual se incluye la deformaci3n por corte las relaciones (2.31) se transforman seg3n:

$$M_{xx} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right] \quad (2.32)$$

$$M_{yy} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left[ \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \mu \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right] \quad (2.33)$$

$$M_{xy} = \frac{Gt^3}{12} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \mu \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right] \quad (2.34)$$

$$Q_x = k.G.t.\gamma_{xz} \quad (2.35)$$

$$Q_y = k.G.t.\gamma_{yz} \quad (2.36)$$

Donde  $t$  es el espesor de la losa y  $k$  es un factor num3rico empleado para mejorar la aproximaci3n por corte, el cual suele considerarse como 1.2. Las deformaciones por corte  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  se consideran constantes seg3n el espesor de la losa y de all3 que se emplee dicho factor. Si de manera an3loga a elementos lineales se considera una distribuci3n de las deformaciones por corte parab3lica seg3n el espesor, el factor  $k$  se obtiene de igualar la energ3a de deformaci3n por corte para una distribuci3n parab3lica de 3ste, con la energ3a de deformaci3n para una distribuci3n constante. Al factor:  $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ , se le conoce como "rigidez a la flexi3n de la losa".

Empleando las ecuaciones (2.20-2.21) se tendr3 al reemplazar en las expresiones (2.32 - 2.36).

$$M_{xx} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} - \mu \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} \right]$$

$$M_{yy} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \right] \quad (2.37)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \right]$$

Si la deformación por corte ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) no se incluye en el análisis, estas expresiones se simplifican como:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_{yy} &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -D(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

De las expresiones anteriores se observa que el efecto de considerar las deformaciones por corte sobre las curvaturas es restarle los términos  $\frac{\partial \gamma_{iz}}{\partial x_i}$  ó  $\frac{\partial \gamma_{iz}}{\partial x_j}$ , los cuales son de segundo orden en comparación a la

curvatura por flecha. Por otra parte, es interesante indicar que si las expresiones (2.38) se reemplazan en las expresiones del equilibrio (2.9) se obtendrá la conocida ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2.40)$$

Por lo que esta expresión es válida, si no se consideran los efectos de las fuerzas de corte en la deformación de la losa. Esta ecuación diferencial parcial de cuarto orden, conocida desde antes de 1820, incluye las ecuaciones del equilibrio, compatibilidad y relaciones esfuerzo deformación, por lo que junto con las condiciones de borde gobierna el análisis de losas.

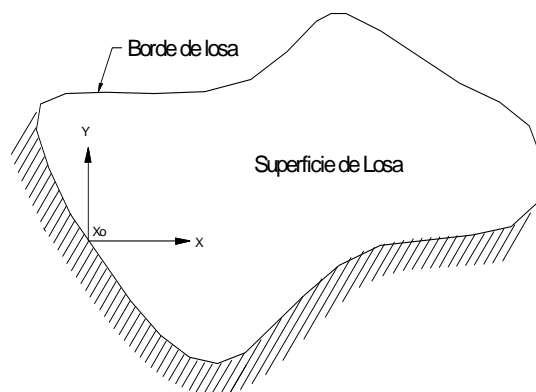
A diferencia de estructuras de barras en general, y problemas de estado plano de esfuerzos donde la relación de poisson no influye en la distribución de fuerzas en losas dicha relación afecta tanto a la distribución de fuerzas como a los desplazamientos. Sin embargo, en muchos casos prácticos y para losas de hormigón, se suele considerar como cero o 0.1 debido a la fisuración. Las losas de hormigón son

estructuras que, por lo general, requieren poca cantidad de refuerzo por unidad de área en comparación a las vigas, por lo que aparece fisuración significativa y el coeficiente de poisson es bajo.

Las leyes esfuerzo deformación también pueden particularizarse para los casos de losas huecas y estratificada. En estos casos, sin embargo, el módulo de elasticidad y el de poisson son funciones del espesor. Por otro lado la ubicación del eje neutro es en estos casos una función de las características de los materiales y de la sección.

### 2.1.5 Condiciones de Borde

Considérese un punto  $(x_0)$  en un borde genérico con tangente según el eje X, tal como se indica en la figura 2.6



**Figura 2.6** Punto genérico en un borde

Las condiciones de borde comúnmente consideradas sobre borde empotrado, simplemente apoyado, libre y borde simétrico.

a) Borde Empotrado: En un borde empotrado no hay deflexión ni rotación por lo que esta condición se expresa según:

$$\begin{aligned} w(x_0) &= 0 \\ \frac{\partial w(x_0)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial w(x_0)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

b) Borde simplemente Apoyado: En un borde simplemente apoyado el desplazamiento vertical y el momento normal son nulos por lo que esta condición se expresa según:

$$w(x_0) = 0$$

$$M_{nn}(x_0) = 0 \quad (2.42)$$

c) Borde Libre: En un borde libre el momento normal, el momento torsor y el cortante son nulos, por lo que esta condición se expresa según:

$$\begin{aligned} M_{nn}(x_0) &= 0 \\ M_{nt}(x_0) &= 0 \\ Q_n(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Kirchhoff demostró, sin embargo, que una de estas condiciones es redundante pues la segunda y tercera se pueden combinar en una sola condición. Esta condición es que una reacción equivalente en el borde libre sea nula. Para obtener la reacción se sustituye el momento torsor  $M_{nt}$  en el borde por un par de fuerzas equivalentes verticales como se indica en la figura 2.7. Esta sustitución no afecta la flexión global de la losa. Así, la reacción vertical en un punto se origina por los cortantes verticales y por la variación de los momentos torsores, por lo que dicha reacción en un borde paralelo al eje X se expresa según:

$$R_{yz} = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.44)$$

Consecuentemente, las condiciones de contorno para un borde libre se reducen a:

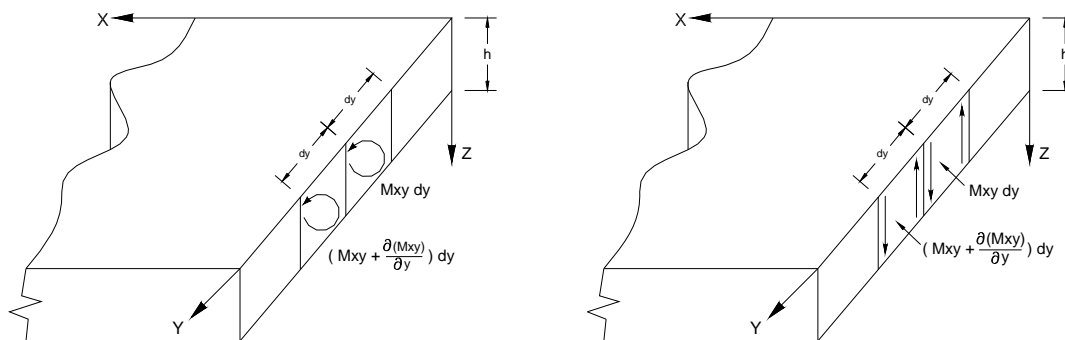
$$R_{yz}(x_0) = M_{yy}(x_0) = 0 \quad (2.45)$$

De esta manera se obtiene no sólo fuerzas cortantes distribuidas en el borde sino reacciones concentradas en las esquinas con magnitud igual al momento torsor. Es interesante indicar que para una losa rectangular uniformemente cargada y simplemente apoyada en su contorno la dirección de dicha reacción es contraria a la de las cargas por lo que para cargas de gravedad la losa tendería a levantarse de sus esquinas. Por ello si no se diseña un apoyo adecuado, la losa se podría levantar, incumpliendo la condición de contorno simplemente apoyado.

Un borde simétrico no es propiamente una condición de contorno, sin embargo, es generalmente útil para grandes losas tener en cuenta la simetría para simplificar el análisis. A lo largo de dicho borde y suponiendo que sea ortogonal al eje y, se cumple:

$$\begin{aligned} M_{xy}(x_0) &= 0 \\ Q_y(x_0) &= 0 \\ \frac{\partial w(x_0)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

De manera similar se podrían plantear condiciones de contorno para un plano de anti simetría y usar el principio de que para una estructura de geometría simétrica cualquier estado de carga se puede dividir en un estado de carga simétrico y otro anti simétrico.



a) Momentos Torsores

b) Fuerzas estáticamente equivalentes

**Figura 2.7** Reacción vertical causada por los momentos torsores equivalentes

## 2.2 TEORÍA DE FUNCIONALES PARA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

### 2.2.1 Introducción

Existen diversos métodos de solución de ecuaciones diferenciales que permiten, entre otros, resolver los problemas de losas. Estos métodos son: el denominado analítico, el de diferencias finitas y el de los elementos finitos.

- El método analítico (Timoshenko 1940) es una solución exacta difícil de plantear en losas de geometría complicada por lo que para fines prácticos no es recomendable.
- El método de diferencias finitas es una solución aproximada que tiene como principio representar las derivadas de la ecuación en “diferencias finitas” del tipo  $(w_{i+1} - w_i) / \delta x$ . Si se considera las condiciones iniciales o de borde será un proceso de solución convergente y aproximado a la solución exacta en función del número de diferencias considerado. Este procedimiento es anterior al de los elementos finitos y tiene la limitación de una mayor complejidad en el cumplimiento de las condiciones de contorno por lo que en la práctica se emplea de forma poco habitual en comparación al de los elementos finitos.
- El método de elementos finitos es una solución aproximada mediante interpolación de funciones cuyo modelo matemático es la discretización o subdivisión de campos, y a cada campo se le denomina subcampo o elemento finito. Para la solución de la ecuación diferencial se identifica una expresión matemática equivalente y funciones de interpolación que la hacen estacionaria. La expresión matemática equivalente a las ecuaciones diferenciales se le conoce como principio variacional, o funcional. La discretización en elementos finitos será un proceso convergente a la solución exacta si se cumplen requisitos de consistencia y de continuidad indicados posteriormente.

## 2.2.2 TEORÍA DE FUNCIONALES

Las ecuaciones que satisfacen un grupo de ecuaciones diferenciales pueden, en muchos casos, identificarse con aquellas que hacen estacionaria una cierta expresión matemática conocida como *funcional* o *principio variacional*. Así, por ejemplo, la función  $u(x)$  que satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p = 0, \quad u(0) = u(L) = 0 \quad (2.47)$$

es aquella que hace mínima la integral:

$$I(u) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + pu \right] dx, \quad u(0) = u(L) = 0 \quad (2.48)$$

donde  $I(u)$  es el denominado funcional asociado a la ecuación (2.47). La ecuación (2.47) se puede obtener considerando el equilibrio en un elemento diferencial tal como el mostrado en la figura 2.8. Considerando el equilibrio de fuerzas en el sentido longitudinal se tiene

$$\sigma_x A = p dx + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) \quad (2.49)$$

Simplificando términos de segundo orden, esta ecuación se transforma en

$$p + \sigma_x \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = p + \frac{\partial A \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (2.50)$$

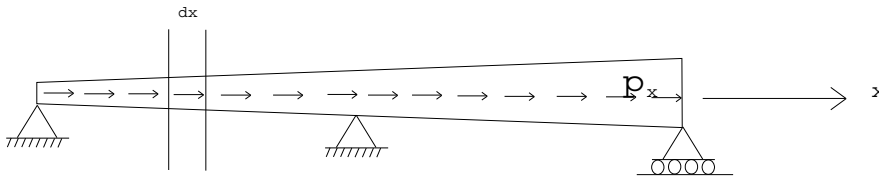
La relación tensión-deformación o del material permite escribir

$$p + \frac{\partial EA \varepsilon_x}{\partial x} = 0 \quad (2.51)$$

y, finalmente, considerando la ecuación de la compatibilidad ( $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ) se obtendría la ecuación diferencial (2.47) que gobierna el análisis estructural de barras sometidas a cargas en su eje longitudinal. La integral en el funcional representado en (2.48) es de la forma:

$$I(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) d\Omega \quad (2.52)$$

Donde  $F$  es una función real conocida de argumentos vectoriales  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$ . El funcional  $I$  está definido por una integral cuyo valor depende, claramente, de las funciones  $u$  consideradas.



**Figura 2.8.** Barra sometida a una fuerza variable en su longitud

En general, es relativamente simple determinar las ecuaciones diferenciales a las que es equivalente un principio variacional pues basta con emplear las condiciones de Euler-Lagrange. Sin embargo, lo inverso no siempre es posible, y en general es un proceso más laborioso.

En el caso de que un principio variacional apropiado sea conocido, el problema de resolver un grupo de ecuaciones diferenciales puede formularse alternativamente como el de determinar las funciones que hacen estacionario (frecuentemente mínimo) el funcional. Dicha minimización puede plantearse empleando un procedimiento tipo Rayleigh-Ritz. Para ello las funciones incógnitas son representadas por funciones de interpolación conocidas, multiplicadas por parámetros indeterminados. Con ello el problema original de determinar una o más funciones que hacen estacionario al funcional se reduce al de determinar los parámetros que hacen estacionaria la integral.

Nótese, sin embargo, que la solución así obtenida no es la solución exacta de las ecuaciones diferenciales, aunque estas se cumplirán en un sentido global. También se debe observar que los errores numéricos pueden darse en todas las ecuaciones, incluyendo las de equilibrio. Esta es una diferencia importante en comparación a métodos clásicos menos precisos, pero basados en el equilibrio y que aproximan el resto de ecuaciones.

Precisamente al inicio del uso de los elementos finitos para el diseño de estructuras se planteaba este inconveniente en comparación a métodos establecidos como el de pórticos virtuales en losas. Este método clásico, aun recogidos en distintas normativas se basa en soluciones de equilibrio que aproximan las restantes condiciones. Así considerando una retícula de pilares perfecta si hacemos cortes al medio de cada vano y consideramos franjas de pórticos (o “pórticos virtuales”) en cada eje tendríamos un sistema equivalente que aproximaría exactamente el equilibrio (asumiendo que los momentos torsores a lo largo de dichos planos de corte son cero o pequeños, lo cual por simetría es correcto y de allí que se condicione

el método a que la retícula sea regular). Una vez planteado el pórtico virtual y calculado el momento flector en el pórtico este se reparte en la “franja central” y la “franja de soportes” en porcentajes aproximados al 25% y 75%. De esta forma la solución es exacta en cuanto al momento total en cada dirección, aunque la distribución de momentos de hecho no lo sea, no siendo esto último importante para un estado límite último de resistencia. Los elementos finitos modernos consideran directamente integrales de los momentos en el contorno de cada elemento, lo cual como se verá en el capítulo siguiente aproxima con precisión las leyes del equilibrio y por lo que esta limitación está en gran parte superada.

Como ejemplo del procedimiento de Rayleigh-Ritz considérese una barra tal como la mostrada en la figura 2.9. Por simplicidad la barra es de sección constante y está sometida a una carga puntual en su extremo 2. Tal como se ha presentado, este problema de análisis estructural se puede plantear como el de minimizar el funcional en (2.48) a partir de *asumir* una función  $u(x)$  que cumpla las condiciones de contorno. Una función que cumple estas condiciones podría ser simplemente

$$u(x) = a \frac{x}{L} \quad (2.53)$$

donde  $a$  es un parámetro indeterminado. Reemplazando (2.53) en (2.48) se obtiene

$$I(u) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} EA \left( \frac{a}{L} \right)^2 - pa \frac{x}{L} \right] dx \quad (2.54)$$

Considerando que  $p$  es sólo una carga puntual en el extremo de la barra, esta integral se transforma en

$$I(u) = \frac{1}{2} EA \frac{a^2}{L} - pa \quad (2.55)$$

Minimizando esta expresión con respecto al parámetro incógnita  $a$ , se obtiene

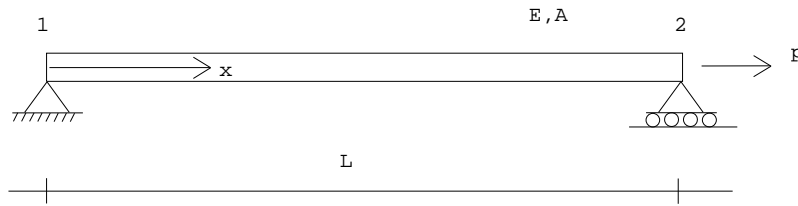
$$EA \frac{a}{L} - p = 0 \quad (2.56)$$

o

$$a = \frac{pL}{EA} \quad (2.57)$$

Nótese que la solución aproximada en (2.57) coincide, en este caso, con la solución exacta ( $\delta = pL/EA$ ).

Este es el caso dado que la función de aproximación planteada en (2.53) es la exacta.



**Figura 2.9** Ejemplo de aplicación del procedimiento de Rayleigh-Ritz.

El procedimiento de Rayleigh-Ritz es simple pero difícil de emplear en situaciones con condiciones de contorno distintas, como tener tres o más apoyos. Un procedimiento más eficiente para dicho objetivo es dividir la barra en “elementos finitos” (EF) y plantear las aproximaciones a nivel local. De esta forma las condiciones de contorno se cumplen de manera natural. Considérese, por ejemplo, la barra mostrada en la figura 2.10 de sección constante y sometida a una carga en un punto a una distancia  $L_1$  de su nudo 1.

En general, para un procedimiento tipo elementos finitos y para barras, las funciones de aproximación o de interpolación para un elemento de dos nudos y longitud  $L_1$  son

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L_1} \tag{2.58}$$

$$N_2 = \frac{x}{L_1}$$

donde  $x$  es una coordenada local con origen en el nudo 1. En general una función incógnita se representa en EF como

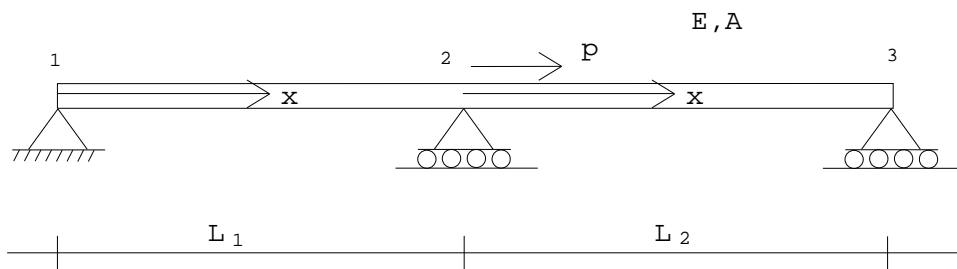
$$f(x) = N_1 f_1 + N_2 f_2 \tag{2.59}$$

donde  $f_1, f_2$  son los valores de la función  $f$  en los nudos 1 y 2, tal como se puede observar al reemplazar  $x = 0$  y  $x = L_1$ , respectivamente. De esta forma para el elemento finito 1, se tendría

$$u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \tag{2.60}$$

La condición de contorno  $u_1 = 0$  se cumple de forma natural simplificando la ecuación (2.60). Reemplazando esta ecuación en (2.48) y considerando la contribución del elemento finito 2, se procedería de forma similar a las ecuaciones (2.54)-(2.57). Finalmente, se obtendría una solución, en este caso

exacta, para el desplazamiento en el nudo intermedio. La determinación de las tensiones o deformaciones sería a partir de la solución en desplazamientos y empleando las ecuaciones de compatibilidad y de tensión-deformación. Obsérvese, por tanto, que las funciones lineales empleadas para aproximar los desplazamientos (2.60) deberán derivarse para representar deformaciones ( $\epsilon_x = \partial u / \partial x$ ) y por ello la variación de las tensiones a lo largo del elemento finito será de un orden inferior. Esta observación no tiene mayor repercusión en este ejemplo dado que la carga externa es puntual y la sección es constante, por lo que las tensiones son constantes a lo largo de cada elemento. Sin embargo, en problemas de mayor complejidad nos permite apreciar que las tensiones, variables de mayor interés práctico en comparación a los desplazamientos, tienen un orden de aproximación inferior a los mismos.



**Figura 2.10** Ejemplo de aplicación del procedimiento de EF.

También se puede observar que, en general, si se emplean “n” parámetros indeterminados la solución se obtendrá al resolver un sistema lineal de (n x n) ecuaciones.

En secciones previas se han presentado las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de las placas delgadas y gruesas. De manera similar a todo problema de Elasticidad, las ecuaciones se dividen en:

- Ecuaciones del equilibrio
- Ecuaciones de la compatibilidad
- Leyes esfuerzo-deformación o de los materiales.

La solución de estas ecuaciones diferenciales puede obtenerse planteando aproximaciones para las funciones incógnitas de tal manera que cumplan alguna de estas ecuaciones y utilizar un principio variacional para las restantes. Por ejemplo, el funcional de energía potencial, que es equivalente a las ecuaciones del equilibrio, puede utilizarse planteando aproximaciones para los desplazamientos que cumplan directamente las ecuaciones de la compatibilidad y las leyes esfuerzo-deformación. Siguiendo este procedimiento se cumplirían de manera exacta las ecuaciones de la compatibilidad y las leyes esfuerzo-deformación pero de manera aproximada o global las leyes del equilibrio.

Esta sección presenta los funcionales de energía potencial, energía complementaria, energía complementaria modifica y el funcional de Reissner. En principio todos estos funcionales pueden emplearse para formular elementos finitos, aunque el funcional de energía potencial es el que se emplea más habitualmente. Sin embargo, el elemento mixto desarrollado en el año de 1985 y formulado a partir del funcional de Reissner es el que se utiliza en la sección 2.5 como comparación con otros elementos más recientes.

### 2.2.3 EL FUNCIONAL DE ENERGÍA POTENCIAL

El funcional de energía potencial es equivalente a las ecuaciones diferenciales del equilibrio y puede escribirse, para el análisis de sólidos, como:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} \right) dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u} \bar{\mathbf{T}} dS \quad (2.61)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_x \\ \bar{b}_y \\ \bar{b}_z \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \bar{T}_x \\ \bar{T}_y \\ \bar{T}_z \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

representando  $\bar{\mathbf{b}}$  y  $\bar{\mathbf{T}}$  fuerzas prescritas en el volumen y en la superficie, respectivamente. Obsérvese que el resultado de las operaciones matriciales indicadas es un escalar que representa dicha energía en todo el dominio.

Las ecuaciones de compatibilidad se cumplen de manera externa al funcional al plantear funciones de aproximación que cumplan, en el volumen, las condiciones:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{2.63}$$

o en notación matricial

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{u}
 \tag{2.64}$$

En los bordes  $S_u$  donde se especifiquen condiciones de apoyo, las condiciones a satisfacer son:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}
 \tag{2.65}$$

Las leyes tensión deformación se cumplen directamente al satisfacer las condiciones

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}
 \tag{2.66}$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \frac{E}{1-\nu^2} & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.67)$$

$G$  y  $\nu$  representan el módulo de corte y el coeficiente de poisson, respectivamente. Para verificar la equivalencia del funcional de energía potencial con las ecuaciones diferenciales del equilibrio se aplicarán las condiciones de Euler-Lagrange. Para ello considerando la notación de las ecuaciones (2.52) se presentan a continuación estas condiciones:

En el interior:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} = 0$$

En el contorno:

$$\eta_x \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + \eta_z \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} + \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

$$\eta_x \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + \eta_z \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} + \frac{\partial G}{\partial v} = 0 \quad (2.69)$$

$$\eta_x \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} + \eta_y \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} + \eta_z \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} + \frac{\partial G}{\partial w} = 0$$

Donde  $F$  es la función que define al funcional en el dominio (V) y  $G$  la función que lo define en el contorno ( $S_\sigma$ ) y  $\boldsymbol{\eta}$  es el vector normal al borde con componentes  $(\eta_x \eta_y \eta_z)$ . Al emplear estas expresiones en (2.61) y teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad y las leyes del material se obtienen las ecuaciones del equilibrio en el interior y en el contorno donde los esfuerzos están prescritos:

En el volumen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

En el contorno:

$$\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{T}} = 0$$

Quedando, por tanto, reflejada la equivalencia entre la expresión (2.61) y las ecuaciones diferenciales del equilibrio de sólidos.

Para minimizar esta expresión empleando el procedimiento de Rayleigh-Ritz los desplazamientos ( $u$  v  $w$ ), en todo el dominio, se representan por un sumatorio de funciones conocidas  $N_i(x)$ , multiplicadas por parámetros indeterminados ( $c_i$   $d_i$   $e_i$ ) tales como:

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i(x) c_i \\ v &= \sum N_i(x) d_i \\ w &= \sum N_i(x) e_i \end{aligned} \quad (2.71)$$

o en notación matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (2.72)$$

Las deformaciones se obtienen derivando este campo de desplazamientos de tal manera que satisfagan las ecuaciones de la compatibilidad:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.73)$$

de forma similar los esfuerzos se obtienen según:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.74)$$

Con lo que al reemplazar en el funcional de energía potencial se obtiene:

$$\Pi_p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV - \mathbf{a}^T \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} dS \quad (2.75)$$

Finalmente al minimizar este funcional con respecto a los parámetros indeterminados ( $\mathbf{a}$ ), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.76)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \\ \mathbf{f} &= \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} dS \end{aligned} \quad (2.77)$$

Es importante resaltar que la ventaja del procedimiento de Rayleigh-Ritz consiste en haber transformado el problema complejo de hallar funciones que hagan mínimo a un funcional, al de resolver un sistema de ecuaciones lineales que es simple de realizar mediante el cálculo con ordenadores. Sin embargo, también se debe resaltar la dificultad de buscar funciones que cumplan directamente las condiciones de compatibilidad en  $S_u$  y por eso su relativa utilidad práctica. Mediante los elementos finitos las condiciones de contorno se pueden satisfacer de una manera casi natural, pudiéndose entender los EF como una continuación de los planteamientos de Rayleigh-Ritz, sin la mencionada limitación. De hecho las expresiones 2.71 a 2.77 son muy similares a las que se obtendrán para el desarrollo de EF, siendo la

diferencia más significativa que las integrales en todo el dominio se transforman en el sumatorio de integrales en cada elemento finito.

### 2.2.4 EL FUNCIONAL DE ENERGÍA COMPLEMENTARIA Y EL DE ENERGÍA COMPLEMENTARIA MODIFICADA

El funcional de energía complementaria equivale a las ecuaciones diferenciales de la compatibilidad y puede escribirse de acuerdo con:

$$\Pi_c(\sigma) = \int_V \frac{1}{2} \sigma^T S \sigma dV - \int_{S_u} T \bar{u} dS \quad (2.78)$$

donde  $\varepsilon = S \sigma$ . De manera similar al funcional de energía potencial, al minimizar esta expresión empleando las condiciones de Euler-Lagrange se obtienen ecuaciones diferenciales equivalentes. De esta forma se obtiene:

En el interior:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.79)$$

En el contorno  $S_u$  :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (2.80)$$

Empleando el procedimiento de Rayleigh-Ritz los esfuerzos en todo el dominio se representan por un sumatorio de funciones conocidas multiplicadas por parámetros indeterminados de manera exactamente análoga como para los desplazamientos en el funcional de energía potencial. Sin embargo, las aproximaciones para los esfuerzos deben de satisfacer el equilibrio, tanto en el interior como en el contorno, lo cual en general no es fácil de plantear. Usando el método de los elementos finitos estas condiciones se deberían de cumplir en el interior de cada elemento y entre elementos, lo cual es aún más difícil de satisfacer. Por ello a pesar de la clara ventaja de trabajar directamente con variables de mayor utilidad práctica su uso es limitado.

Una alternativa para cumplir directamente las condiciones del equilibrio es la de representar los esfuerzos con la función de Airy ( $\phi$ ). Por ejemplo, para un estado plano de esfuerzos se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2.81)$$

Planteando funciones de interpolación para  $\phi$ , y en ausencia de fuerzas de cuerpo, las condiciones del equilibrio se cumplen directamente. Debe indicarse, sin embargo, que al emplear la función de Airy aumenta en el funcional la derivada de mayor orden, lo que tiene repercusiones en los requisitos de continuidad de las funciones de interpolación para elementos finitos. En general se puede afirmar que desde un punto de vista matemático clásico la continuidad necesaria para poder garantizar la convergencia a la solución exacta de un procedimiento tipo EF es de hasta un orden menos a la derivada de mayor orden que aparezca en el funcional (en realidad los avances en este campo han demostrado que estos requisitos pueden relajarse en determinados casos). Así en el funcional representado por la ecuación (2.61) y teniendo en cuenta que las variables primarias son desplazamientos, aparecen sólo términos en una derivada. Por tanto en un procedimiento tipo EF, las funciones de interpolación deben ser sólo continuas entre sí, sin serlo sus derivadas (continuidad tipo C0). En otros problemas de análisis pueden aparecer derivadas segundas lo cual condicionaría una continuidad entre elementos y sus derivada (tipo C1), lo cual es, en general, difícil de cumplir.

Una alternativa para reducir los requisitos de continuidad es emplear modelos híbridos de esfuerzos formulados basándose en el funcional de energía complementaria modificada. Empleando este funcional los requisitos de continuidad entre esfuerzos son encargados a cumplir al mismo funcional. Para ello empleando multiplicadores de Lagrange ( $\lambda$ ) definidos únicamente en el borde entre sub-regiones se tiene:

$$\prod_{mc}(\sigma, \lambda) = \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{S} \sigma \, dV - \int_{S_u} \mathbf{T} \bar{\mathbf{u}} \, dS - \int_{S_{el}} \mathbf{T} \lambda \, dS \quad (2.82)$$

donde  $S_{el}$  es el borde entre sub-regiones. Empleando las condiciones de Euler-Lagrange se determina que  $\lambda \equiv \mathbf{u}$ , por lo que el funcional de energía complementaria modificada se puede expresar como:

$$\prod_{mc}(\sigma, \mathbf{u}) = \int_V \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{S} \sigma \, dV - \int_{S_u} \mathbf{T} \bar{\mathbf{u}} \, dS - \int_{S_{el}} \mathbf{T} \mathbf{u} \, dS \quad (2.83)$$

Utilizando este funcional las aproximaciones para esfuerzos deben de cumplir únicamente las condiciones del equilibrio en el interior de cada sub-región. Por otro lado se observa que las aproximaciones para los desplazamientos sólo son planteadas en el borde entre sub-regiones.

### 2.2.5 EL FUNCIONAL DE REISSNER

El funcional de Reissner es un funcional mixto dado que cuando se emplea en problemas de elasticidad, tensiones y desplazamientos son variables primarias e independientes. Al hacer este funcional estacionario se cumplen no sólo las leyes del equilibrio sino también las de la compatibilidad. Dado que el cumplir estas últimas es relativamente simple (por lo menos dentro de cada elemento y en su contorno sin incluir sus derivadas, como puede apreciarse de la ecuación 2.64) la ventaja principal de esta expresión está dada por la independencia de las variables tensión y deformación que permiten su manipulación matemática para reducir el orden de la derivada de mayor orden que aparezca en el funcional y por la representación directa de variables de mayor interés práctico como las tensiones en comparación a los desplazamientos.

Este funcional puede ser obtenido a partir del funcional de energía potencial, el cual cumple el equilibrio, y forzando las condiciones de compatibilidad usando multiplicadores de Lagrange. Las expresiones de Euler-Lagrange para hacer estacionario este nuevo funcional indicarán el significado de los multiplicadores. Para problemas de elasticidad, estos multiplicadores tienen, generalmente, un significado físico en tensiones y desplazamientos. Siguiendo este procedimiento, considérese el funcional de energía potencial sujeto a las siguientes restricciones de la compatibilidad en  $S_u$  y  $V$  :

$$\Pi_r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} \right) dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u} \bar{\mathbf{T}} dS + \int_{S_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\lambda}_2 dS + \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{T}^T) \boldsymbol{\lambda}_1 dV \quad (2.84)$$

Donde  $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$  son multiplicadores de Lagrange y  $\mathbf{T}$  es la matriz que relaciona deformaciones y desplazamientos definida en 2.64. Aplicando las condiciones de Euler-Lagrange se obtiene:

En el interior:

$$-\mathbf{b} + \partial \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}$$

En el contorno:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{T}} &= 0 \quad \text{en } S_\sigma \\ -(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \frac{\partial \lambda_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= 0 \quad \text{en } S_u\end{aligned}\tag{2.86}$$

estas expresiones indican que los multiplicadores de Lagrange tienen el siguiente significado físico en esfuerzos:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\boldsymbol{\sigma} \\ \lambda_2 &= \mathbf{T} = \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}\tag{2.87}$$

Reemplazando estos valores en la expresión (2.84) se obtiene:

$$\prod_r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} \right) dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u} \bar{\mathbf{T}} dS + \int_{S_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma} dS - \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{T}^T) \boldsymbol{\sigma} dV\tag{2.88}$$

las relaciones esfuerzo-deformación se pueden cumplir de manera externa al funcional al considerar  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}$  ó  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S}$ . Así, finalmente, el funcional de Reissner se expresa de la manera siguiente:

$$\prod_r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \left( -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u} \bar{\mathbf{b}} \right) dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{u} \bar{\mathbf{T}} dS + \int_{S_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma} dS + \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma} dV\tag{2.89}$$

Tal como está presentado este funcional ha sido empleado para el análisis de sólidos obteniéndose resultados ventajosos numéricamente en comparación a los obtenidos mediante la energía potencial. Este resultado es, en primera instancia, sorprendente pues el funcional de Reissner necesita de 9 incógnitas por nudo (tres desplazamientos y seis tensiones) mientras que el de energía potencial sólo necesita de tres. A pesar de esta desventaja y comparando el número total de incógnitas esta formulación es ventajosa numéricamente pues permite representar las tensiones (variables de mayor interés práctico que los desplazamientos) con mayor exactitud que las formulaciones en energía potencial.

## 2.3 ANÁLISIS DE LOSAS MEDIANTE EF

### 2.3.1 Análisis sin incluir deformación por corte

Según se ha visto, en el análisis de placas es común el considerar los desplazamientos en el plano de la placa en función de los giros de la superficie neutra. Esta hipótesis implica que al especializar el funcional de energía potencial o el de Reissner al análisis de placas, aparezcan derivadas segundas en los desplazamientos. Como se ha indicado el orden de continuidad requerido en las funciones de aproximación empleadas para formular los elementos finitos esta dado por la derivada de mayor orden en el funcional. Este es un inconveniente para el análisis de placas empleando elementos finitos basados en energía potencial dado que es difícil el proponer funciones de aproximación con continuidad C1.

Empleando el funcional de Reissner se pueden realizar ciertas integrales por partes disminuyendo el orden de las derivadas en desplazamientos, y aumentando el orden de las derivadas en esfuerzos. Otra de las características más interesantes de la aplicación del funcional de Reissner al análisis de placas, es que los campos de desplazamientos y de tensiones son independientes. Considerando la siguiente notación

$$U = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} \right) dV$$

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\theta}$$

$$\bar{q} = \int_z \bar{b}_z dz$$
(2.90)

en la cual se ha añadido a la energía de deformación interna  $U$  deformaciones impuestas  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Por otra parte recuérdese que en las placas en estudio no se dan cargas en su plano ( $\bar{b}_x = \bar{b}_y = 0$ ). Al no considerar deformación por corte, ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ), los giros se pueden expresar según:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \chi_{xx} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \chi_{yy} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}$$
(2.91)

Así los desplazamientos pueden expresarse en función de los giros y de los desplazamientos de la superficie neutra:

$$\begin{aligned}
u &= u^0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
v &= v^0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
w &= f(x, y)
\end{aligned} \tag{2.92}$$

siendo los desplazamientos  $w$ , denominados habitualmente la flecha de la placa, independientes de la posición "z" del punto. Substituyendo estas ecuaciones en el funcional de Reissner se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Pi_r = & -U + \int \int_{A_z} \left\{ -w \bar{b}_z + \left( \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \sigma_{xx} + \left( \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \sigma_{yy} + \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} - 2z \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) \tau_{xy} \right\} dV - \\
& - \int_{S_\sigma} \int_z \bar{T}_x \left( u^0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz dS - \int_{S_\sigma} \int_z \bar{T}_y \left( v^0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \right) dz dS - \int_{S_\sigma} \int_z \bar{T}_z w dz dS + \\
& + \int_{S_u} \int_z T_x \left( u^0 - z \frac{\partial w}{\partial x} - \bar{u} \right) dz dS + \int_{S_u} \int_z T_y \left( v^0 - z \frac{\partial w}{\partial y} - \bar{v} \right) dz dS + \int_{S_u} \int_z T_z (w - \bar{w}) dz dS
\end{aligned} \tag{2.93}$$

donde  $T_x, T_y, T_z$  representan las componentes del vector  $(\eta \sigma)$  en  $S_u$ . Como los giros son independientes de  $Z$  y no actúan fuerzas en la dirección del plano de la placa se pueden eliminar los términos tipo  $(\int \sigma_{xx} dz = 0)$ , obteniéndose luego de simplificar convenientemente:

$$\begin{aligned}
\Pi_r = & -U + \int \int_{A_z} \left\{ -w \bar{b}_z - z \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{xx} - z \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{yy} - 2z \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \tau_{xy} \right\} dV + \\
& + \int_{S_\sigma} \int_z \bar{T}_x z \frac{\partial w}{\partial x} dz dS + \int_{S_\sigma} \int_z \bar{T}_y z \frac{\partial w}{\partial y} dz dS - \int_{S_\sigma} \int_z \bar{T}_z w dz dS - \\
& - \int_{S_u} \int_z T_x \left( z \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{u} \right) dz dS - \int_{S_u} \int_z T_y \left( z \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{v} \right) dz dS + \int_{S_u} \int_z T_z (w - \bar{w}) dz dS
\end{aligned} \tag{2.94}$$

De forma similar recordando la notación de la teoría de placas se puede obtener la siguiente expresión para el funcional de Reissner:

$$\begin{aligned}
 \Pi_r(w, M) = & -U - \int_A \left( w\bar{q} + M_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + 2M_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + M_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA + \\
 & + \int_{S_\sigma} \left( \bar{M}_{mn} \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{M}_{ns} \frac{\partial w}{\partial n} - \bar{Q}_n w \right) dS - \\
 & - \int_{S_u} M_{mn} \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) dS - \int_{S_u} M_{ns} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right) dS + \int_{S_u} Q_n (w - \bar{w}) dS
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Tal como está expresado el funcional aparecen derivadas de segundo orden en desplazamientos, lo cual no es conveniente por los requisitos de continuidad de las funciones de interpolación. Recordando las expresiones matemáticas de las derivadas por partes, se pueden plantear simplificaciones del tipo:

$$\int_A M_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dA = \int_A \frac{\partial}{\partial x} (M_{xx} \frac{\partial w}{\partial x}) dA - \int_A \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dA \tag{2.96}$$

y realizando la siguiente integral por partes, se reduce el orden de la derivada en desplazamientos

$$\begin{aligned}
 \int_A (M_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + 2M_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + M_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}) dA = & \int_A \left( \frac{\partial}{\partial x} (M_{xx} \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (M_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (M_{yx} \frac{\partial w}{\partial x}) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial y} (M_{yy} \frac{\partial w}{\partial y}) \right) dA - \\
 & - \int_A \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Por otra parte, el Teorema de Green en el plano indicado a continuación por claridad permite escribir

$$\iint_R \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \int_C g(x, y) dy = \int_C g(x, y) \eta_y dS \tag{2.98}$$

o similarmente

$$\iint_R \left( \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \int_C g(x, y) dx + \int_C g(x, y) dy = \int_C (g(x, y) \eta_x + g(x, y) \eta_y) dS \quad (2.99)$$

Empleando estas expresiones la ecuación (2.97) se simplifica en

$$\begin{aligned} \int_A \left( M_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + 2M_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + M_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA = \int_S \left( \eta_x M_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + \eta_x M_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \eta_y M_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ \left. + \eta_y M_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS - \\ - \int_A \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA \end{aligned} \quad (2.100)$$

Por otra parte las ecuaciones del equilibrio entre momentos y cortantes en la placa permite escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} &= Q_x \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} &= Q_y \end{aligned} \quad (2.101)$$

Transformándose la ecuación 2.101 en

$$\begin{aligned} \int_A \left( M_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + 2M_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + M_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA = \int_S \left( \eta_x M_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + \eta_x M_{yx} \frac{\partial w}{\partial y} + \eta_y M_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ \left. + \eta_y M_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dS - \int_A \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA \end{aligned} \quad (2.102)$$

y, finalmente, según las expresiones para la transformación de momentos entre ejes locales y globales presentadas en (2.11) se obtiene

$$\int_A \left( M_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + 2M_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + M_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA = \int_S \left( M_{nn} \frac{\partial w}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w}{\partial s} \right) dS - \int_A \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA \quad (2.103)$$

Reemplazando esta ecuación en (3.49) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Pi_r(w, M) = & -U + \int_A \left( -w\bar{q} + Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA - \int_S \left( M_{nn} \frac{\partial w}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w}{\partial n} \right) dS + \\
 & + \int_{S_\sigma} \left( \bar{M}_{nn} \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{M}_{ns} \frac{\partial w}{\partial n} - \bar{Q}_n w \right) dS - \\
 & - \int_{S_u} M_{nn} \left( \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) dS - \int_{S_u} M_{ns} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right) dS + \int_{S_u} Q_n (w - \bar{w}) dS
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Considerando que  $S = S_u + S_\sigma$  esta expresión se simplifica en

$$\begin{aligned}
 \Pi_r(w, M) = & -U + \int_A \left( -w\bar{q} + Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA + \\
 & + \int_{S_\sigma} \left( (\bar{M}_{nn} - M_{nn}) \frac{\partial w}{\partial n} + (\bar{M}_{ns} - M_{ns}) \frac{\partial w}{\partial n} - \bar{Q}_n w \right) dS - \\
 & - \int_{S_u} M_{nn} \frac{\partial w}{\partial n} dS - \int_{S_u} M_{ns} \frac{\partial w}{\partial s} dS + \int_{S_u} Q_n (w - \bar{w}) dS
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Si se cumple externamente que  $w = \bar{w}$  en  $S_u$  y que  $M_{nn} = \bar{M}_{nn}$ ,  $M_{ns} = \bar{M}_{ns}$  en  $S_\sigma$  se puede simplificar esta expresión y obtener finalmente:

$$\Pi_r(w, M) = -U + \int_A \left( -w\bar{q} + Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA - \int_{S_\sigma} \bar{Q}_n w dS - \int_{S_u} M_{nn} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} dS - \int_{S_u} M_{ns} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} dS \tag{2.106}$$

que corresponde a la especialización del funcional de Reissner para placas, sin considerar deformación por corte. Obsérvese que en esta expresión sólo incluye derivadas de primer orden. Es también importante el resaltar que al simplificar términos tales como:

$$\begin{aligned}
& \int_{S_U} Q_n (w - \bar{w}) dS \\
& \int_{S_\sigma} (M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \frac{\partial w}{\partial s} dS \\
& \int_{S_\sigma} (M_{nn} - \bar{M}_{nn}) \frac{\partial w}{\partial n} dS
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Si en un borde no se prescribe, por ejemplo el desplazamiento vertical  $w$ , implica que el cortante  $Q_n$  es nulo en dicho borde. Lo mismo sucede con los momentos normal y tangencial pues si en un borde no se prescribe, esto indica que los giros normal y tangencial, respectivamente, son nulos.

### 2.3.2 Análisis de losas incluyendo deformación por corte

La especialización del funcional de Reissner incluyendo deformación por corte es muy similar a la anterior. Para ello siguiendo las convenciones antes presentadas y además:

$$\begin{aligned}
\gamma_x &= \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\gamma_y &= \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

se tiene inicialmente:

$$\begin{aligned}
\Pi_r = -U + \int \int_A \int_Z & \left\{ -w \bar{b}_z + \left( \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial x} \theta_x \right) \sigma_{xx} + \left( \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial y} \theta_y \right) \sigma_{yy} + \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial y} \theta_x - z \frac{\partial}{\partial x} \theta_y + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) \tau_{xy} \right\} dV - \\
& - \int_{S_\sigma} \int_Z \bar{T}_x (u^0 - z \theta_x) dz dS - \int_{S_\sigma} \int_Z \bar{T}_y (v^0 - z \theta_y) dz dS - \int_{S_\sigma} \int_Z \bar{T}_z w dz dS + \\
& + \int_{S_u} \int_Z T_x (u^0 - z \theta_x - \bar{u}) dz dS + \int_{S_u} \int_Z T_y (v^0 - z \theta_y - \bar{v}) dz dS + \int_{S_u} \int_Z T_z (w - \bar{w}) dz dS
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Simplificando convenientemente y teniendo en cuenta que  $\gamma_x$  y  $\gamma_y$  son independientes de  $Z$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \prod_r(w, M) = & -U + \int_A \left( M_{xx} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + M_{yx} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + M_{yy} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \gamma_x Q_x + \gamma_y Q_y - w\bar{q} \right) dA \\
 & - \int_{S_u} M_{nn} (\theta_n - \bar{\theta}_n) dS - \int_{S_u} M_{ns} (\theta_s - \bar{\theta}_s) dS - \int_{S_u} Q_n (w - \bar{w}) dS - \\
 & - \int_{S_\sigma} (\bar{M}_{nn} \theta_n + \bar{M}_{ns} \theta_s + \bar{Q}_n w) dS
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio (2.101), y realizando integrales similares a las indicadas entre (2.100) y (2.103) se obtiene:

$$\int_A (M_{xx} \theta_{xx} + 2M_{xy} \theta_{xy} + M_{yy} \theta_{yy} + Q_x \gamma_x + Q_y \gamma_y) dA = \int_S (M_{nn} \theta_n + M_{ns} \theta_s) dS - \int_A (Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y}) dA \tag{2.111}$$

con lo cual la expresión (2.111) se transforma en:

$$\begin{aligned}
 \prod_r(w, M) = & -U + \int_A \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y} - \bar{q}w \right) dA + \int_{S_\sigma} \{ (M_{nn} - \bar{M}_{nn}) \theta_n + (M_{ns} - \bar{M}_{ns}) \bar{\theta}_s - \bar{Q}_n w \} dS + \\
 & + \int_{S_u} \{ M_{nn} \bar{\theta}_n + M_{ns} \bar{\theta}_s - Q_n (w - \bar{w}) \} dS
 \end{aligned} \tag{2.112}$$

Esta expresión puede ser simplificada, si las condiciones:

$$M_{nn} = \bar{M}_{nn}; \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns}; \quad w = \bar{w} \tag{2.113}$$

se cumplen en  $S_\sigma$  y  $S_u$  externamente al funcional. Finalmente, el funcional se expresa como:

$$\prod_r(w, M) = -U + \int_A \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y} - \bar{q}w \right) dA - \int_{S_\sigma} \bar{Q}_n w dS + \int_{S_u} (M_{nn} \bar{\theta}_n + M_{ns} \bar{\theta}_s) dS \tag{2.114}$$

Esta es la expresión empleada para formular los elementos finitos en este trabajo, la cual como se puede observar es relativamente compacta. Tal como se ha indicado presenta diversas ventajas en comparación a las formulaciones convencionales en energía potencial. Entre ellas destaca el no tener derivadas segundas

en el funcional y el representar los momentos flectores como variables primarias con una potencial representación en polinomios de mayor grado. Con este funcional sólo se necesita una continuidad  $C_0$  de las funciones de interpolación entre elementos, lo cual es simple de obtener. Los elementos que necesitan una continuidad  $C_1$  (tales como los formulados en energía potencial) necesitan de procedimientos de integración especiales, tales como la integración reducida, para poder solventar el hecho de que los giros normales al borde entre elementos no serán, en general, continuos. Por ello al plantear elementos finitos en energía potencial se han desarrollado diversos elementos especializados sólo para determinados casos, tales como placas gruesas o delgadas. El elemento mixto propuesto no tiene estas limitaciones no necesitándose procedimientos como la integración reducida y siendo apto tanto para placas delgadas como gruesas. En secciones siguientes se comparará con otros elementos propuestos para analizar placas.

## 2.4 DESARROLLO DE ELEMENTOS FINITOS

### 2.4.1 Introducción

Como se ha indicado el método de los elementos finitos puede ser considerado como un caso particular del método de Rayleigh-Ritz, donde las funciones de aproximación están planteadas para ‘elementos finitos’ y no para la posiblemente complicada región en su conjunto. La discretización en elementos finitos será un proceso convergente a la solución exacta si se cumplen requisitos de consistencia y de continuidad. La consistencia indica que la derivada de mayor orden que aparece en el funcional debe por lo menos ser representada por las funciones de interpolación. Además, las funciones de interpolación deben permitir representar aquellos casos en los que las funciones incógnitas o sus derivadas son constantes a través de los elementos (movimientos de cuerpo rígido). Las condiciones de continuidad indican que las funciones de interpolación deben ser continuas por lo menos hasta un orden inferior al de la derivada de mayor orden en el funcional.

Muchas alternativas han sido propuestas desde que el método de los elementos finitos fue inicialmente aplicado al análisis de placas. Estas alternativas pueden clasificarse en elementos compatibles (conformes o noconformes), elementos de equilibrio, elementos híbridos, y finalmente elementos mixtos.

Los elementos basados en energía potencial o elementos compatibles pueden clasificarse en elementos conformes o noconformes, según cumplan estrictamente o no las condiciones de continuidad entre elementos. Al formular elementos compatibles para el análisis de placas aparece en el funcional derivadas de segundo orden en desplazamientos (curvaturas), por este motivo, los elementos conformes requieren que las funciones de interpolación sean de orden  $C_1$ , lo cual no es fácil de conseguir. Los elementos noconformes son aquellos que, aún sin cumplir estrictamente dichos requisitos de continuidad, convergen. Este comportamiento aparentemente contradictorio de los elementos noconformes originó su nombre. Por ejemplo, el elemento de Melosh es uno noconforme usado comúnmente para el análisis de placas. Siendo este elemento quizá el que más éxito ha tenido dentro de todos los propuestos no cumple las condiciones de continuidad de giros entre bordes de elementos, y por ello una transformación isoparamétrica general no es fácil, a pesar de que el elemento converge.

Los elementos formulados basándose en la energía complementaria o elementos de equilibrio cumplen globalmente las condiciones de compatibilidad y requieren que las condiciones de equilibrio y las relaciones esfuerzo-deformación se cumplan externamente al funcional. Las funciones de interpolación deben cumplir las condiciones de continuidad en tensiones en los bordes entre elementos, lo que es muy difícil de satisfacer y por esta causa, los elementos de equilibrio no se utilizan en la práctica. No obstante, hay que indicar la clara ventaja que estos elementos supondrían sobre los elementos compatibles al satisfacer exactamente el equilibrio.

Los elementos híbridos se formulan basados en elementos de equilibrio, relajando las condiciones de continuidad en esfuerzos entre elementos. Han sido empleados con éxito para el análisis de placas y son ciertamente una alternativa interesante para dicho análisis.

Finalmente, otra alternativa para el análisis de placas son las formulaciones mixtas que se presentan a continuación.

### 2.4.2 Elemento finito mixto

Para la formulación de este elemento se empleará la especialización del funcional de Reissner al análisis de placas incluyendo deformación por corte (expresión 3.68). Las funciones de interpolación se presentan a continuación y cumplen los requisitos de consistencia y continuidad expresados con anterioridad. Por ello el funcional de Reissner se puede expresar como el sumatorio en cada uno de los elementos finitos de dicho funcional, es decir:

$$\prod_r(w, M) = \sum_{el} \left\{ -U_{el} + \int_{A_{el}} \left( Q_x \frac{\partial w}{\partial x} + Q_y \frac{\partial w}{\partial y} - \bar{q}w \right) dA - \int_{S_\sigma} \bar{Q}_n w dS + \int_{S_u} (M_{nn} \bar{\theta}_n + M_{ns} \bar{\theta}_s) dS \right\} \quad (2.115)$$

donde la energía de deformación en cada elemento incluyendo deformaciones por corte y deformaciones impuestas  $\bar{\chi}$  es

$$U_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{S}^F \mathbf{M} + \mathbf{M} \bar{\chi} + \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{S}^c \mathbf{Q} \quad (2.116)$$

Las incógnitas por nudo son:

- El desplazamiento vertical (w)

- Los tres momentos ( $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$ ) los cuales se ajustan a la convención de signos de la figura 2.1b. Los cortantes verticales no son funciones primarias del modelo mixto pues se obtienen a partir de los momentos empleando las condiciones del equilibrio (ecuaciones 2.7).

El elemento finito propuesto corresponde a un cuadrilátero isoparamétrico mixto de cuatro a ocho nudos. Los nudos de las esquinas son fijos y alternativamente se puede o no agregar un nudo intermedio en cada lado. De esta manera se pueden representar exactamente bordes parabólicos. Por otro lado si los tres nudos de un borde son repetidos, el elemento se transforma en un triángulo de tres a ocho nudos. En general, desde el punto de vista numérico es aconsejable emplear los ocho nudos para tener una mayor precisión. Sin embargo, desde el punto de vista de la representación geométrica los elementos de tres a seis nudos son más convenientes existiendo mejores malladores automáticos que para cuadriláteros.

En el interior de cada elemento finito las funciones incógnitas se representan como el sumatorio de funciones de interpolación, tal como:

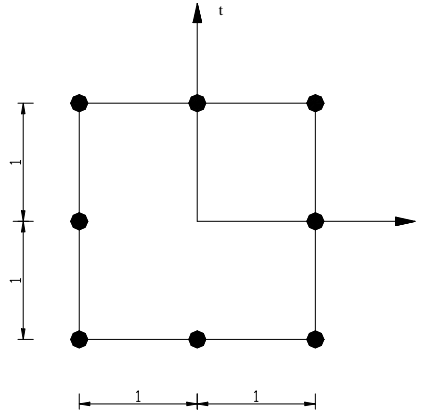
$$f(x, y) = \sum N_i(x, y) f_i \quad (2.117)$$

donde  $f(x,y)$  es una función incógnita,  $N_i(x,y)$  son las funciones de interpolación y  $f_i$  es el valor de la función incógnita en el nudo 'i' del elemento finito. Las funciones de interpolación empleadas son las que se corresponden a las de 'Serendipity'. Para el cuadrilátero mostrado en la figura 2.11 estas funciones se representan por:

$$\begin{aligned} N_1(s, t) &= \bar{N}_1(s, t) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8) \\ N_2(s, t) &= \bar{N}_2(s, t) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6) \\ N_3(s, t) &= \bar{N}_3(s, t) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7) \\ N_4(s, t) &= \bar{N}_4(s, t) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8) \\ N_5(s, t) &= \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 + t) \\ N_6(s, t) &= \frac{1}{2}(1 - t^2)(1 - s) \\ N_7(s, t) &= \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 - t) \\ N_8(s, t) &= \frac{1}{2}(1 - t^2)(1 + s) \end{aligned} \quad (2.118)$$

donde las funciones  $\bar{N}_i(s, t)$  corresponden a las funciones de interpolación de un cuadrilátero de solo cuatro nudos:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_1(s,t) &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \\
 \bar{N}_2(s,t) &= \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \\
 \bar{N}_3(s,t) &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t) \\
 \bar{N}_4(s,t) &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t)
 \end{aligned}
 \tag{2.119}$$



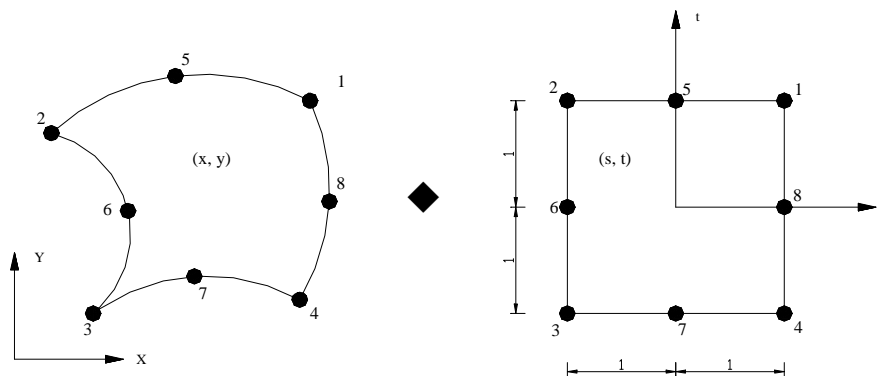
**Figura 2.11** Cuadrilátero de cuatro a ocho nudos

Obsérvese que la ventaja de presentar las funciones de interpolación sin agruparlas es de que permite eliminar un nudo intermedio cualquiera, permitiendo la formulación de un elemento general de cuatro a ocho nudos.

Las coordenadas de un elemento finito pueden a su vez ser interpoladas con el objeto de obtener elementos más generales que, por ejemplo, el elemento mostrado en la figura 2.11. Si las funciones de interpolación escogidas para representar a las funciones incógnitas son las mismas que las escogidas para representar la geometría del elemento, esta transformación se conoce como isoparamétrica.

Considerando la transformación que se muestra en la figura 2.12 y usando las funciones de interpolación (3.71), un punto cualquiera (x,y) en el interior del cuadrilátero se representa por:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^8 N_i(s,t)x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^8 N_i(s,t)y_i
 \end{aligned}
 \tag{2.120}$$



**Figura 2.12** Transformación isoparamétrica

Debe indicarse que una transformación isoparamétrica es conforme si esta es única, es decir, un punto en la región XY debe de corresponderse con un punto y solo uno en la región ST. Este requisito equivale a que cualquier ángulo interior ( $\alpha$ ) del cuadrilátero mostrado en la figura 2.12 debe ser menor a  $180^\circ$  (es decir el cuadrilátero debe ser convexo) y de que los nudos intermedios estén siempre definidos en el tercio central del borde correspondiente. Esta indicación es importante para modelar losas dado que es una potencial fuente de error.

Muchas veces los términos a integrar incluyen no solo las funciones incógnitas sino también sus derivadas, las cuales se pueden obtener según:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{i=1}^j \frac{\partial N_i(s,t)}{\partial x} f_i \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sum_{i=1}^j \frac{\partial N_i(s,t)}{\partial y} f_i \end{aligned} \tag{2.121}$$

donde

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial t} \end{Bmatrix} \quad (2.122)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

La matriz J se denomina matriz Jacobiana y se puede observar que todos sus términos son conocidos ya que se obtienen de las expresiones (2.120). Por otra parte debe observarse que la matriz Jacobiana se necesita dado que las derivadas de las funciones de interpolación en (2.121) son en función de las coordenadas x,y, en lugar de las coordenadas “naturales” s,t.

En general, al realizar el cambio de variable  $XY \Rightarrow ST$  los polinomios de interpolación en ST no se transforman en los mismos polinomios en XY, excepto para el polinomio lineal 1,x,y. Por ello la transformación isoparamétrica afecta el orden de convergencia esperado. Para evitar este inconveniente se debe evitar usar elementos muy distorsionados con los que suelen conseguirse resultados inferiores comparados con elementos regulares.

Por otra parte hay que tener en cuenta la ventaja de reemplazar la complicada región de integración inicial por regiones de integración fijas ‘s-t’, en las que se puede aplicar un procedimiento de integración numérica, tal como el de Gauss-Legendre. Es decir, se transforma la integral inicial sobre una área complicada a la evaluación de la función y sus derivadas en ciertos puntos de integración numérica preestablecidos. Para el cuadrilátero mostrado con nueve puntos de integración son suficientes.

Los desplazamientos, momentos, cortantes, giros y curvaturas impuestas en el interior de cada elemento finito se representan, respectivamente, como:

$$w = \{w\} = [N_1, N_2, \dots, N_8] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix} = N \times W^e \quad (2.123)$$

$$M = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx1} \\ M_{yy1} \\ M_{xy1} \\ \vdots \\ M_{xx8} \\ M_{yy8} \\ M_{xy8} \end{Bmatrix} = P \times M^e \quad (2.124)$$

$$Q = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & N_{1,2} & N_{8,1} & 0 & N_{8,2} \\ 0 & N_{1,2} & N_{1,1} & \dots & 0 & N_{8,2} \\ 0 & N_{1,2} & N_{1,1} & \dots & 0 & N_{8,2} \end{bmatrix} M^e = R \times M^e \quad (2.125)$$

$$w_j = \begin{Bmatrix} w_{,1} \\ w_{,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & N_{1,2} & N_{8,1} & 0 & N_{8,2} \\ 0 & N_{1,2} & N_{1,1} & \dots & 0 & N_{8,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix} = B \times W^e \quad (2.126)$$

$$\bar{\chi} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_{xx1} \\ \bar{\chi}_{yy1} \\ \bar{\chi}_{xy1} \\ \vdots \\ \bar{\chi}_{xx8} \\ \bar{\chi}_{yy8} \\ \bar{\chi}_{xy8} \end{Bmatrix} = P \times \chi_0^e \quad (2.127)$$

teniendo en cuenta la siguiente convención

$$H^e = \int_A (P^T S^F P + R S^C P) dA \quad (2.128)$$

$$G^e = \int_A R^T B dA \quad (2.129)$$

$$F^e = \int_A N^T \bar{q} dA \quad (2.130)$$

$$d^e = \int_A P^T P \bar{\chi} dA \quad (2.131)$$

el funcional de Reissner en notación matricial se puede reescribir, sin incluir rotaciones o cortantes prescritos en los bordes, según:

$$\prod_r(w, M) = \sum^e \left[ -\frac{1}{2} M^{eT} H^e M^e + M^{eT} G^e W^e - W^{eT} F^e - M^{eT} d^e \right] \quad (2.132)$$

Al hacer estacionario este funcional con respecto al desplazamiento vertical y a los momentos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} -H & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ F \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

Este sistema de ecuaciones, y tal como esta presentado conduce a una matriz de coeficientes llena, pero si se agrupan los términos de momentos y desplazamientos correspondientes al mismo nudo se obtiene una matriz del tipo banda, similar a la obtenida usando formulaciones tradicionales.

La matriz de coeficientes obtenida no necesariamente es definida positiva pudiéndose obtener ceros en la diagonal principal al resolver el sistema de ecuaciones, sin embargo, en la práctica esto rara vez es un inconveniente.

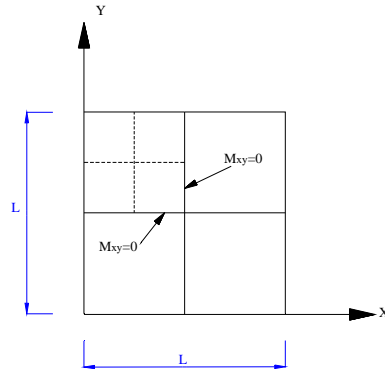
## 2.5 COMPARACIÓN ENTRE EF PROPUESTOS PARA ANALIZAR LOSAS

### 2.5.1 Introducción

Debido a la gran variedad de aplicaciones posibles, es muy difícil poder escoger a un elemento finito como “el mejor” para el análisis de losas. Sin embargo, siempre es ventajoso poder representar con la mayor exactitud posible pero con el menor número de incógnitas, un determinado estado tensional. En este estudio comparativo la eficiencia de varias alternativas presentadas para el análisis de losas es investigada para losas con diversas condiciones de vinculación. El número de incógnitas en el modelo y la habilidad para representar diversos estados tensionales indicará la calidad de un elemento. Su mayor adaptabilidad para generar geometrías complejas de forma automática no se considera dado que un elemento cuadrilátero siempre se puede convertir en uno triangular de forma automática no existiendo diferencias reales entre elementos de tres hasta ocho nudos. Es claro que desde el punto de vista práctico los elementos modernos son todos en general de una aceptable precisión pero la sección será de utilidad para determinar el nivel de error que se puede obtener en distintas situaciones simples motivo de una pobre discretización o motivo de un EF de poca precisión. En el capítulo siguiente se presentaran recomendaciones prácticas en cuanto al número y disposición mínima de EF para obtener una aceptable precisión de diseño.

### 2.5.2 Losas cuadradas

Se presentan comparaciones para losas cuadradas simplemente apoyadas y empotradas, ambas uniformemente cargadas o sujetas a una carga concentrada en su centro. También se presenta el caso de una losa cuadrada simplemente apoyada en sus cuatro esquinas y con una carga uniforme. Al presentar este caso la simetría se usa para analizar sólo un cuarto de la losa, tal como se muestra en la figura 2.13. Las condiciones de contorno para los bordes según los ejes de simetría corresponden a un momento torsor nulo.



**Figura 2.13.** Losa cuadrada y subdivisión en elementos finitos correspondiente a  $N=4$ .

En las tablas 1 a 4 se representan resultados para losas cuadradas simplemente apoyadas y empotradas bajo cargas uniformemente distribuidas y concentradas. Los elementos finitos considerados son el de Melosh y el elemento finito mixto (EFM8) implementado en un programa elaborado por (Drs. H. Scaletti y Luis Bozzo en el año 1985). Los resultados son comparados con valores analíticos obtenidos por Timoshenko, pero incluyendo términos adicionales en los desarrollos en series para mejorar la aproximación.

<b>Tabla 1. Deflexión centro de vano. Losa cuadrada simplemente apoyada</b>					
Malla	Incógnita s	Carga Uniforme (q)		Carga Concentrada (P)	
		$\alpha$	% Error	$\beta$	% Error
Melosh 2×2	3	0.003446	15.16	0.013784	18.83
Melosh 4×4	12	0.003939	3.03	0.012327	6.27
Melosh 8×8	48	0.004033	0.71	0.011829	1.97
Melosh 12×12	108	0.004050	0.3	0.011715	0.99
Melosh 16×16	192	0.004056	0.15	0.011671	0.61

CAPITULO 2: ANÁLISIS DE LOSAS PLANAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

EFM8 2x2	16	0.003906	3.84	0.011413	1.61
EFM8 4x4	56	0.004056	0.15	0.011683	0.72
EFM8 8x8	120	0.004061	0.02	0.011640	0.36
Exacta		0.004062		0.0116	

$$\delta = \alpha \frac{qL^4}{D} : \text{Flecha máxima en placa con carga uniforme } q.$$

$$\delta = \beta \frac{PL^3}{D} : \text{Flecha máxima en placa con carga concentrada } P.$$

<b>Tabla 2. Deflexión centro de vano. Placa cuadrada empotrada</b>					
Malla	Incógnitas	Carga Uniforme (q)		Carga Concentrada (P)	
		$\alpha$	% Error	$\beta$	% Error
Melosh 2x2	3	0.00143	17.1	0.005919	5.7
Melosh 4x4	12	0.001403	11.0	0.006134	9.54
Melosh 8x8	48	0.001304	3.2	0.005803	3.63
Melosh 12x12	108	0.001283	1.5	0.00571	1.96
Melosh 16x16	192	0.001275	0.87	0.005672	1.29
EFM8 2x2	16	0.001503	18.9	0.006707	19.8
EFM8 4x4	56	0.00126	0.32	0.005668	1.21
EFM8 8x8	120	0.001265	0.08	0.005657	1.02
Exacta		0.001264		0.0056	

$$\delta = \alpha \frac{qL^4}{D} : \text{Flecha máxima en placa con carga uniforme } q.$$

$$\delta = \beta \frac{PL^3}{D} : \text{Flecha máxima en placa con carga concentrada } P.$$

<b>Tabla 3. Momento flector centro de vano. Placa cuadrada simplemente apoyada</b>					
Malla	Incógnitas	Carga Uniforme (q)		Carga Concentrada (P)	
		$\alpha$	% Error	$\beta$	% Error

Melosh 2×2	3	0.066	37.8		
Melosh 4×4	12	0.0521	8.76		
Melosh 8×8	48	0.0497	3.76		
Melosh 12×12	108	0.0489	2.09		
Melosh 16×16	192	0.0485	1.25		
EFM8 2×2	16	0.03563	25.61	0.2856	35.16
EFM8 4×4	56	0.0482	0.66	0.396	10.12
EFM8 8×8	120	0.04786	0.05	0.4406	
Exacta		0.04789		Solución singular	

$M = \alpha qL^2$  : Momento positivo máximo en placa con carga uniforme q.

$M = \beta P$  : Momento positivo máximo en placa con carga concentrada P.

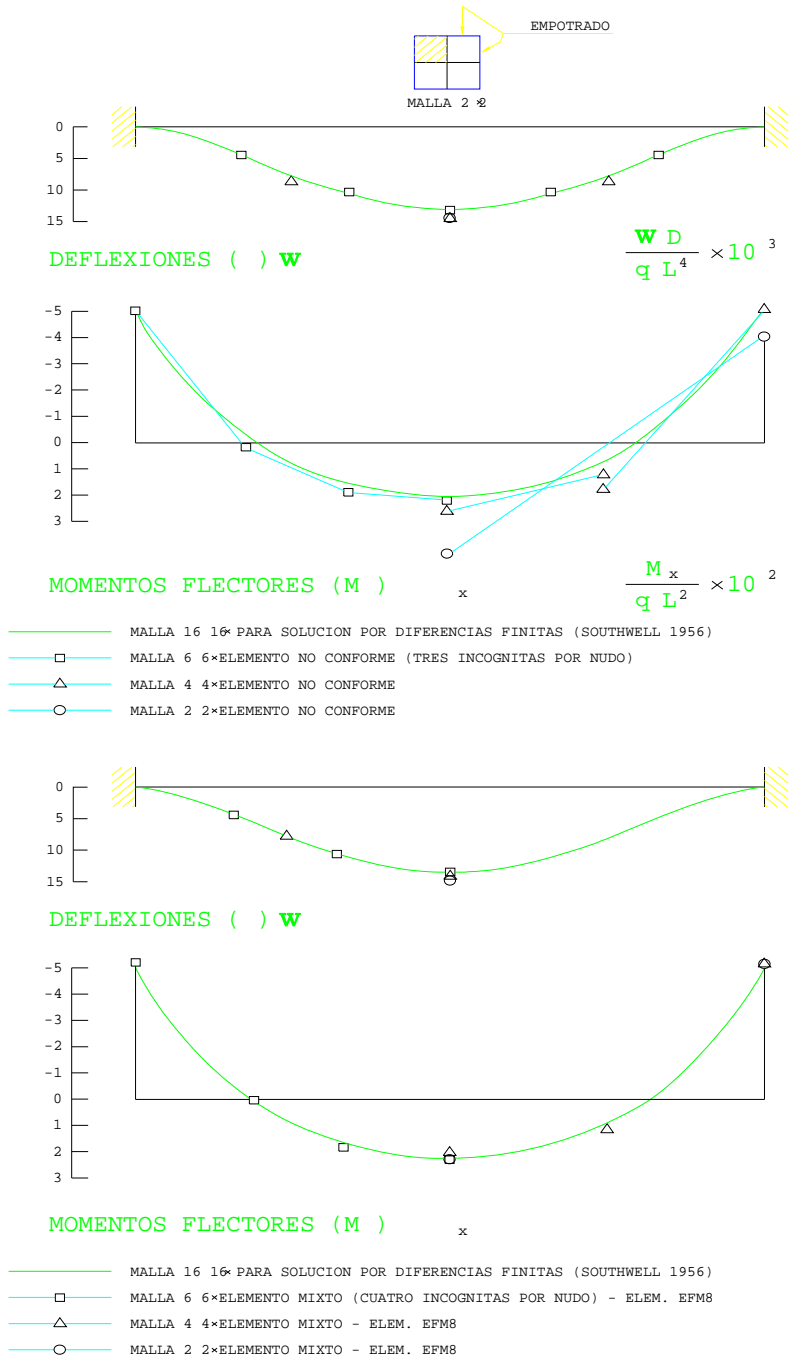
<b>Tabla 4. Momento flector centro de vano. Placa cuadrada empotrada</b>					
Malla	Incógnitas	Carga Uniforme (q)		Carga Concentrada (P)	
		$\alpha$	% Error	$\beta$	% Error
Melosh 2×2	3	0.0461			
Melosh 4×4	12	0.027	19.9		
Melosh 8×8	48	0.0249	7.78		
Melosh 12×12	108	0.024	3.89		
Melosh 16×16	192	0.0236	2.16		
EFM8 2×2	16	0.02296	0.61	0.264	31.96
EFM8 4×4	56	0.0211	8.66	0.336	13.4
EFM8 8×8	120	0.0232	0.43	0.388	
Exacta		0.0231		Solución singular	

$M = \alpha qL^2$  : Momento positivo máximo en placa con carga uniforme q.

$M = \beta P$  : Momento positivo máximo en placa con carga concentrada P.

De estas tablas se observa que la solución con el elemento EFM8 converge más rápidamente que la solución con el elemento de Melosh, tanto para desplazamientos como para momentos flectores. Por ejemplo, en la tabla 1 para deflexiones en el centro del vano considere la solución con 108 incógnitas

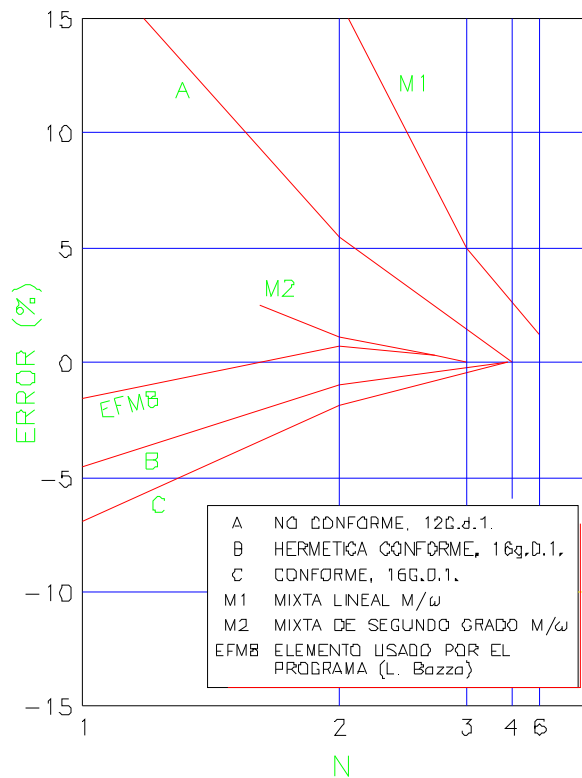
empleando el elemento de Melosh y la solución con sólo 56 incógnitas (casi la mitad de incógnitas) empleando el elemento EFM8. El error empleando el elemento mixto es 50% menor que con el elemento no conforme para la carga uniforme y un 25% menor para la carga concentrada. La precisión es aún más evidente si se consideran tensiones, pues para el elemento EFM8 las funciones de interpolación para momentos son cuadráticas mientras que para el elemento de Melosh son lineales. Así, por ejemplo, considerando las mencionadas soluciones pero en la tabla 3 y para el momento flector en el centro del vano para carga uniforme se observa que la solución con elementos mixtos es cuatro veces mejor incluso con sólo la mitad de incógnitas. Estas observaciones son válidas para la gran mayoría de casos considerados.



**Figura 2.14.** Solución para elementos finitos no conformes y el elemento EFM8 para placas cuadradas empotradas.

La figuras 2.14 y 2.15 presentan los resultados, para una placa cuadrada empotrada sometida una carga distribuida y para una placa simplemente apoyada con una carga concentrada aplicada en su centro, originalmente dados por Zienkiewicz para diversos elementos, incluyendo mixtos, pero añadiendo las soluciones obtenidas con el elemento EFM8. La solución teórica para los esfuerzos en esta placa es singular y por ello la comparación se realiza con la solución obtenida usando el elemento EFM8 con una malla de 6x6. La rápida convergencia del elemento propuesto puede ser fácilmente observada en esta figura, así como la variación de los momentos flectores que son parabólicos para el elemento EFM8 mientras que para el elemento no conforme su variación es lineal.

La figura 2.16 ilustra diversas divisiones de mallas regulares y distorsionadas para placas cuadradas simplemente apoyadas y empotradas. Las tablas 5 y 6 presentan resultados para el desplazamiento vertical en dichas placas comparando el elemento de Ahmad-Irond (elemento C8), los elementos de Chang-Koon Choi (elementos NC8-4.1 y NC8-5.1) y el elemento mixto EFM8. Los elementos NC8-4.1 y NC8-5.1 se obtuvieron agregando, respectivamente, 4 ó 5 modos no conformes al desplazamiento vertical y empleando integración reducida. La mejor precisión del elemento EFM8 es evidente para todos los casos mostrados en las tablas.



**Figura 2.15.** Comparaciones para las deflexiones de una placa simplemente apoyada sometida a una carga concentrada P.

Tabla 5. Elemento con integración reducida. Placa cuadrada simplemente apoyada y uniformemente cargada						
Elemento		Malla distorsionada		Malla regular		
Designación	Regla de integración	N=2	N=4	N=2	N=3	N=4
C8	2×2	55.96	60.34	60.19	60.59	60.61
C8	3×3	49.14	59.50	56.93	59.92	60.33
NC8-4.1	3×3	55.40	60.18	58.20	60.40	60.58
NC8-4.1	2×2+3×3	56.11	60.36	60.20	60.59	60.61
NC8-5.1	3×3	59.68	60.62	60.29	60.57	60.60
NC8-5.1	2×2+3×3	57.67	60.50	60.22	60.59	60.61
EFM8	3×3	60.6		60.47	60.55	
Teoría		60.57				

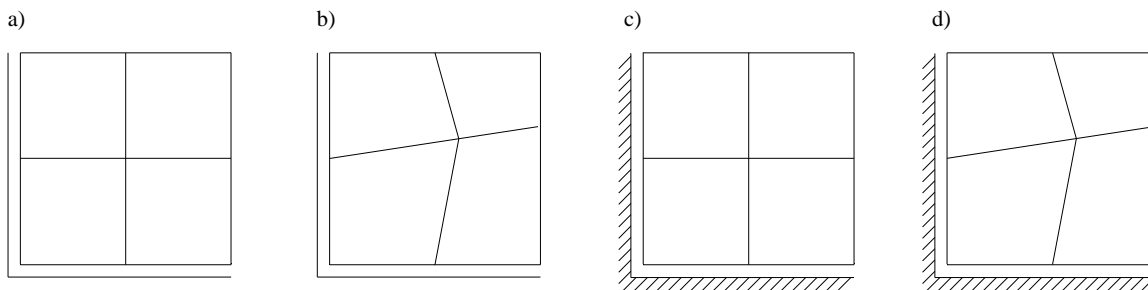
**Figura 2.16.** Placa cuadrada a)-b) Simplemente apoyada y uniformemente cargada con malla regular y malla distorsionada c)-d) Empotrada y uniformemente cargada con malla regular y distorsionada.

Tabla 6. Elemento con integración reducida. Placa cuadrada empotrada sujeta a una carga concentrada						
Elemento		Malla distorsionada		Malla regular		
Designación	Regla de integración	N=2	N=4	N=2	N=3	N=4
C8	2×2	8.21	12.92	9.49	12.71	13.04
C8	3×3	3.2	11.81	4.41	10.63	11.97
NC8-4.1	3×3	7.00	12.75	8.31	12.29	12.90
NC8-4.1	2×2+3×3	8.38	12.94	9.6	12.74	13.04
NC8-5.1	3×3	12.04	13.05	12.34	12.93	13.05
NC8-5.1	2×2+3×3	10.62	13.08	11.63	12.97	13.11

CAPITULO 2: ANÁLISIS DE LOSAS PLANAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

EFM8	3×3	13.05		13.2	13.10	
Teoría	13.1					

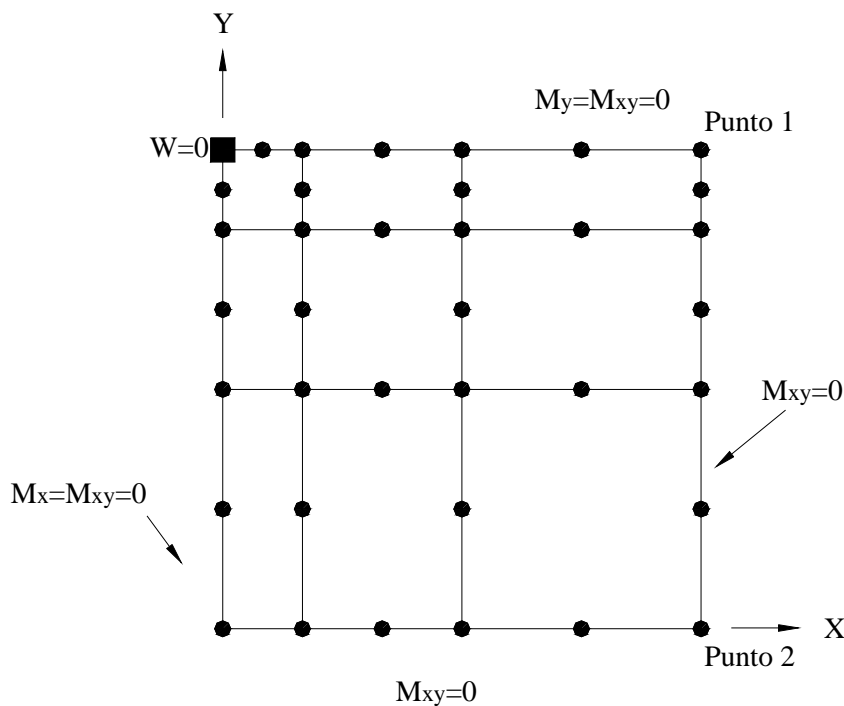


Figura 2.17. Placa cuadrada simplemente apoyada en sus cuatro esquinas y de longitud total L.

La figura 2.17 presenta una placa cuadrada apoyada en sus cuatro esquinas y solicitada por una carga uniformemente repartida. Resultados teóricos dados por Ballesteros y Lee, y por Marcus se emplean en la tabla 7 para comparar los elementos de Melosh y el EFM8. Ambos elementos dan buenos resultados para esta placa, en particular si se tienen en cuenta las diferencias entre las propias soluciones analíticas presentadas por Ballesteros y Lee, y por Marcus.

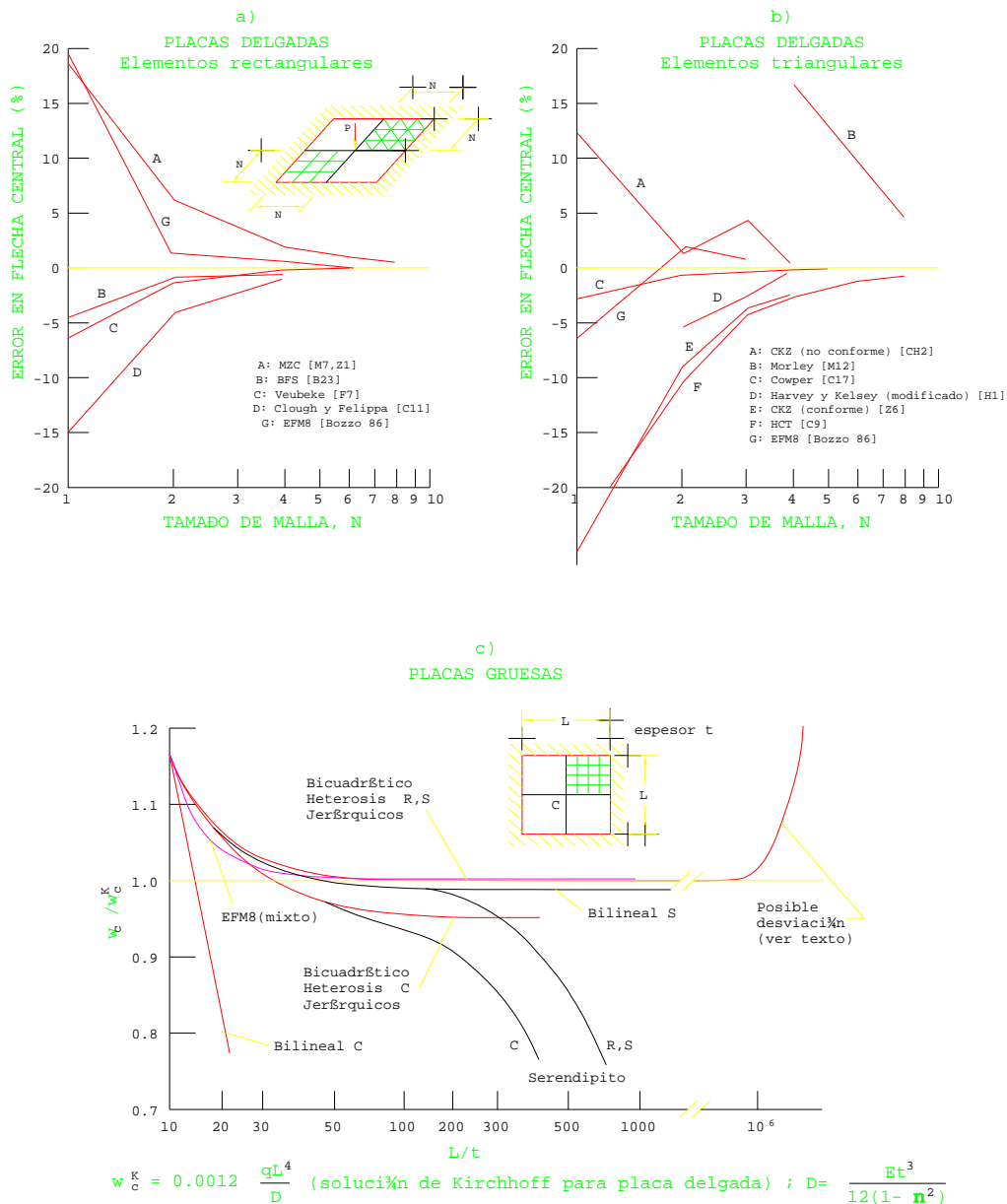
Tabla 7. Placa cuadrada apoyada en sus cuatro esquinas. Carga uniforme (q)				
Elemento	Punto 1		Punto 2	
	W	$M_x$	W	$M_x$
Melosh 2×2	0.0126	0.139	0.0176	0.095
Melosh 4×4	0.0165	0.149	0.0232	0.108
Melosh 6×6	0.0173	0.15	0.0244	0.109
EFM8 6×6	0.0187	0.153	0.0263	0.113
Marcus	0.018	0.154	0.0261	0.11

---

Ballesteros y Lee	0.017	0.14	0.0265	0.109
Factor	$\frac{qL^4}{D}$	$qL^2$	$\frac{qL^4}{D}$	$qL^2$

Las figuras 2.18a y 2.18b muestran varios elementos propuestos para analizar losas delgadas sin incluir deformación por corte. A estos elementos se ha añadido el EFM8 con lo que podemos observar buenos resultados tanto para elementos rectangulares como para triangulares. Los elementos EFM8 triangulares se obtienen simplemente definiendo con el mismo nudo tres nudo de un borde.

## CAPITULO 2: ANÁLISIS DE LOSAS PLANAS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS



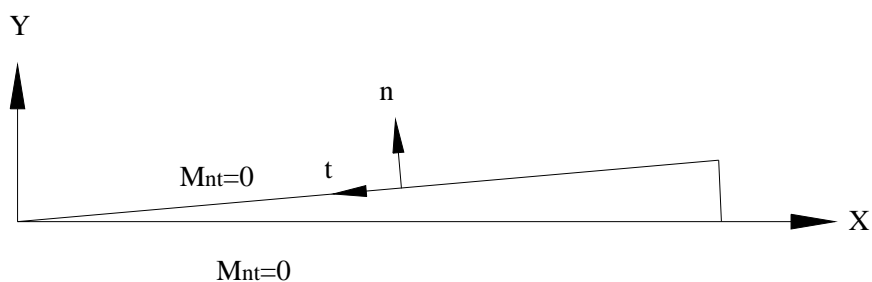
**Figura 2.18** Comparación de diversos elementos propuestos para losas delgadas y gruesas y el elemento EFM8.

Hay que resaltar que el elemento EFM8 es versátil y de gran precisión, ya que proporciona buenos resultados para una gran variedad de problemas sin la necesidad de definir un elemento especial para losas gruesas o delgadas y sin recurrir a artificios poco elegantes como el de la integración reducida.

Además, el elemento EFM8 puede tener de tres a ocho nudos por lo que se pueden representar triángulos o cuadriláteros.

### 2.5.3 losas circulares

La figura 2.19 presenta una losa circular con condiciones de borde empotrada y simplemente apoyada, sujeta a una carga uniformemente distribuida. Dada la simetría axial del problema y empleando el elemento EFM8, la losa puede ser analizada únicamente considerando un sector circular de la misma y prescribiendo las condiciones de borde apropiadas. En este caso el momento torsor normal  $M_{nt}$  es nulo en todo el borde. Debe de observarse que si bien éste es un problema sencillo analíticamente, no lo es numéricamente pues la variación de los momentos flectores y desplazamiento vertical según los ejes X,Y es compleja. A medida que se reduce el ángulo interior se aproximarán mejor los resultados, por lo que para este estudio comparativo se consideró un ángulo de 5 grados.



**Figura 2.19.** Placa circular empotrada o simplemente apoyada en el borde sujeta a una carga uniformemente distribuida.

La tabla 8 presenta resultados dados por Li, Cheung y Tham usando 'strip elements'. Teniendo en cuenta que las soluciones con el elemento EFM8 se obtuvieron con un número muy inferior de incógnitas comparadas al de los 'strip elements', puede concluirse que el elemento EFM8 obtiene buenos resultados para el desplazamiento transversal en el centro de la placa. Se observó, además, que para obtener resultados precisos en el borde de la losa -sea éste empotrado o simplemente apoyado- y utilizando sólo un elemento en la dirección tangencial se necesita un ángulo interior de como máximo 10 grados.

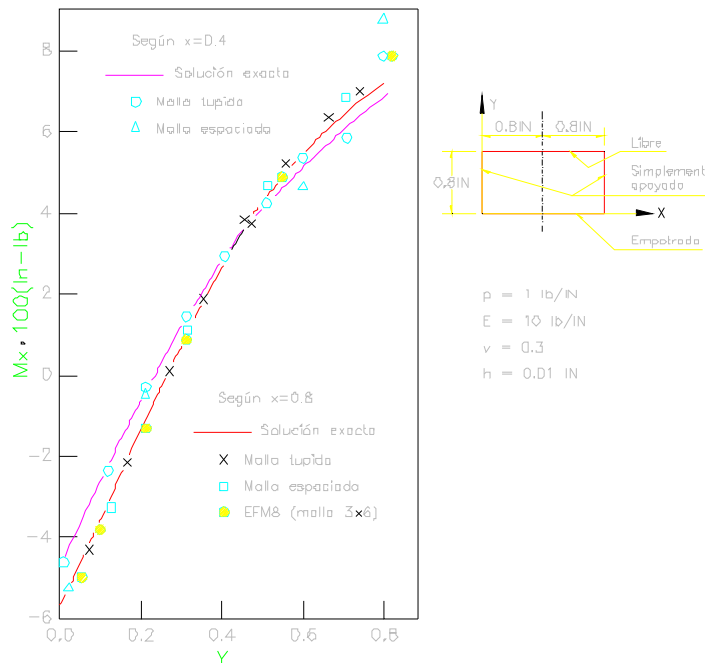
Tabla 8. Desplazamiento máximo losa circular uniforme cargada				
Elemento	Simplemente apoyada		Empotrada	
	Factor	% Error	Factor	% Error

Strip 8x8	0.06391	0.33	0.01567	0.32
Strip 12x12	0.06383	0.204	0.01568	0.26
EFM8x1*	0.06301	1.0	0.01548	0.95
Solución exacta	0.0637		0.01563	

\*Angulo interior de 5°.

### 2.5.4 Losas rectangulares

La siguiente aplicación corresponde a una losa rectangular simplemente apoyada en dos bordes opuestos, libre en otro y empotrada en el restante (Fig. 2.20). Para esta losa Pian y Tong presentan resultados dados por Hermann siguiendo dos procedimientos. En el primer procedimiento los momentos  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $M_{xy}$  y el desplazamiento vertical  $w$ , varían linealmente dentro de cada elemento. En el segundo procedimiento los momentos son constantes mientras que los desplazamientos varían linealmente. Como es de esperar el elemento EFM8 converge más rápidamente que los mencionados elementos mixtos propuestos por Hermann, pues los polinomios de interpolación para el elemento EFM8 son cuadráticos.

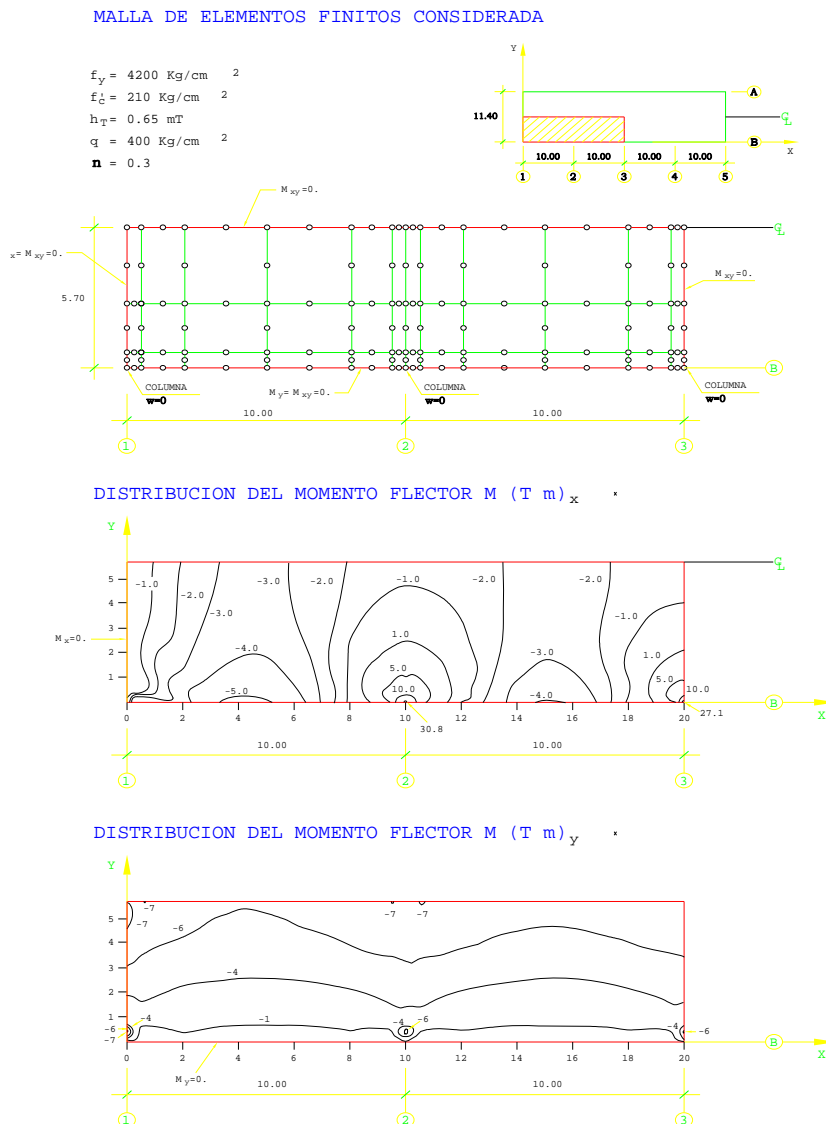


**Figura 2.20** Placa rectangular simplemente apoyada en dos bordes, libre en otro y empotrada en el cuarto, sometida a una carga uniformemente distribuida.

### 2.5.5 Ejemplo práctico

En la figura 2.21 se representan algunos resultados para una losa rectangular apoyada en dos hileras de columnas. La losa es de espesor constante y esta sometida a una carga uniformemente

distribuida. Se puede observar en los resultados que el momento flector  $M_{xx}$  varia de forma apreciable a lo largo del ancho de la losa, mientras que el momento  $M_{yy}$  se mantiene prácticamente constante a lo largo de esta. Por este motivo, emplear como método de diseño el método de pórticos virtuales o equivalentes no es adecuado.



**Figura 2.21.** Placa rectangular apoyada en dos hileras de columnas sometida a carga uniformemente distribuida a) Malla de elementos finitos usando el elemento mixto EFM8 b) Distribución del momento flector  $M_{xx}$  c) Distribución del momento flector  $M_{yy}$ .

Los métodos basados en los pórticos virtuales asumen que las cargas son principalmente transmitidas a las columnas por las ‘frangas de columnas’, de manera que estas frangas tendrían esfuerzos

considerablemente mayores a los esfuerzos en las denominadas ‘frangas centrales’. Este comportamiento se da en la dirección longitudinal donde existen varios vanos, sin embargo, en la dirección transversal los momentos  $M_{yy}$  son prácticamente constantes y por tanto iguales entre las frangas centrales y las de columnas. Por tanto al usar estos métodos aproximados para el diseño de la losa mostrada en la figura 2.21.a, los esfuerzos en las frangas centrales estarían considerablemente por debajo de los reales, con lo que se provocaría fisuración en estas zonas y como consecuencia una redistribución de esfuerzos. Esta observación es independiente de las otras varias limitaciones que tienen estos métodos referentes a las ubicación y alineamiento de pilares.